
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب
الرياضيات البحتة
الصف الثاني الثانوي - الفصل الدراسي الأول
كتاب الطالب
Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصري
2030
EGYPT VISION
القسم العلمي
غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم
2025-2024
D.M.RAZK
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي









الصف الثانى الثانوى

كـتــاب الطــالــب الفــصـل الدراســى الأول

القسم العلمي

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح | أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى | أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

مراجعة وتعديل

د/ محمد محى الدين عبد السلام | أ/ شريف عاطف البرهامى

أ/ ماجد محمد حسن | أ/ عثمان مصطفى عثمان

د/ مدحت عطية شعراوى

إشراف علمى (مستشار الرياضيات)

أ/ منال عزقول

إشراف تربوى (رئيس الادارة المركزية لتطوير المناهج)

د/ أكرم حسن

طبعة ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

1 تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

2 تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

3 تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

4 اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

5 اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

6 احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هى: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة، ومخطط تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة **الأولى**

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الوحدة **الثانية**

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

المحتويات

الوحدة الثالثة
النهايات والاتصال

الوحدة الرابعة
حساب المثلثات



الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

Real Functions and Drawing Curves

مقدمة الوحدة

يعد ليوناردو أويلر *Leonhard Euler* (١٧٠٧م - ١٧٨٣م) السويسرى الأصل من أبرز علماء القرن الثامن عشر فى الرياضيات والفيزياء، فقدم وعمم الكثير من التعبيرات الرياضية ومنها مفهوم الدالة (Function) وينسب له استخدام الرمز $y=f(x)$ أو ص = د(س) للدلالة على الدالة معتبرًا أن الدالة ارتباط بين عناصر مجموعتين بعلاقة تسمح بحساب قيمة متغير تابع ص لآخر مستقل س نختاره بحرية، وبذلك عرَّف الدالة لا المنحنى مما ساهم في تحويل الهندسة إلى علاقات حسابية، كما حول جميع النسب المثلثية التى نوه بها المصريون القدماء والبابليون وبرع فيها العرب إلى دوال مثلثية. أدخل أويلر العدد الثابت $e \simeq 2.71828$ (عدد أويلر) كأساس اللوغاريتم الطبيعى، واكتشف العلاقة الرياضية $e^{i\pi} + 1 = 0$ والتى تربط بين أهم خمسة ثوابت في الرياضيات، كما ربط بين الدوال المثلثية والدوال الأسية والأعداد المركبة.
فى هذه الوحدة ستعرف صورًا مختلفة من الدوال الحقيقية وسلوكها وتمثيلها بيانيًّا مستخدمًا التحويلات الهندسية والبرامج الرسومية واستخدام الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- يتعرف فكرة مبسطة عن العمليات على الدوال الحقيقية (تركيب الدوال)
- يتعرف بعض خواص الدوال الحقيقية.
- يتعرف الدوال الزوجية والدوال الفردية ويفرق بينهما.
- يتعرف الدالة الأحادية (one - to - one).
- يستنتج اطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال - تناقص الدوال - ثبوت الدوال).
- يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية - دالة المقياس - الدالة التكعيبية - الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها.
- يستنتج تأثير كل من التحويلات:
  د(س ± أ) ± ب، أ د (س ± ب) ± جـ
  على الدوال السابقة.
- يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- يحل معادلات على الصورة:
  |أ س + ب| = جـ، |أ س + ب| = |ء س + ج|،
  |أ س + ب| = ج س + ء
- يحل متباينات على الصورة:
  |أ س + ب| < ج ، |أ س + ب| ≤ ج ،
  |أ س + ب| > ج ، |أ س + ب| ≥ ج
- يستخدم الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.
- يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة أنشطة.
- يبحث عن التمثيل البيانى للدوال الحقيقية السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج الجيوجيبرا "geogebra".
- يستخدم الآلة الحاسبة البيانية في التمثيل البياني لبعض الدوال التى يصعب تمثيلها بالطرق العادية ثم دراسة خواص هذه الدوال.

المصطلحات الأساسية

المصطلح	Term
دالة حقيقية	Real Function
مجال	Domain
مجال مقابل	Co–domain
مدى	Range
خط رأسي	Vertical Line
دالة متعددة التعريف	Piecewise–Defind Function
دالة مركبة	Composite Function
دالة زوجية	Even Function
دالة فردية	Odd Function
دالة أحادية	One–to–One Function
اطراد دالة	Monotony of a Function
دالة تزايدية	Increasing Function
دالة تناقصية	Decreasing Function
دالة ثابتة	Constant Function
دالة كثيرة الحدود	polynomial Function
دالة مقياس (قيمة مطلقة)	Absolute Value Function
دالة كسرية	Rational Function
خط تقارب	Asymptote
تحويل	Transformation
إزاحة (انتقال)	Translation
انعكاس	Reflection
تمدد	Stretching
حل بياني	Graphical Solution

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): الدوال الحقيقية.

الدرس (١ - ٢): بعض خواص الدوال.

الدرس (١ - ٣): اطراد الدوال.

الدرس (١ - ٤): التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية.

الدرس (١ - ٥): حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

مخطط تنظيمى للوحدة



الأدوات والوسائل

آلة حاسبة رسومية - حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Graph, GeoGebra)



الدوال الحقيقية

Real Functions

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

المصطلحات الأساسية

- دالة Function
- مجال Domain
- مجال مقابل Co-domain
- مدى Range
- مخطط سهمى Arrow Diagram
- مخطط بياني Cartesian Diagram
- خط رأسى Vertical Line
- دالة متعددة التعريف Piecewise Function

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

تذكر أن

إذا كانت د: سـ ⟵ صـ فإن بيان د = {(س، ص): س ∈ سـ ، ص ∈ صـ ، ص = د(س)}

استكشف

تعريف

الدالة الحقيقية *Real Function*

تسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ع أو مجموعة جزئية منها.

تعلم

اختبار الخط الرأسى

إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة؛ كانت العلاقة دالة من سـ ⟵ صـ

دالة

ليست دالة

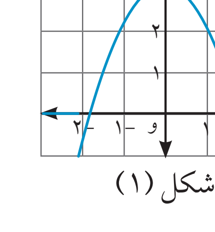



مثال

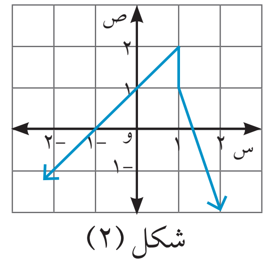
تحديد العلاقة التى تمثل دالة

Identify the Relation Representing Function

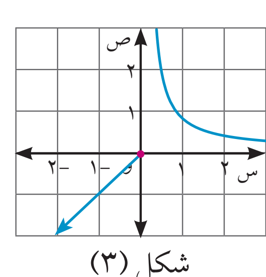
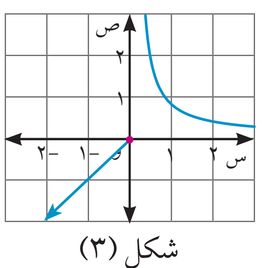
١ فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا.



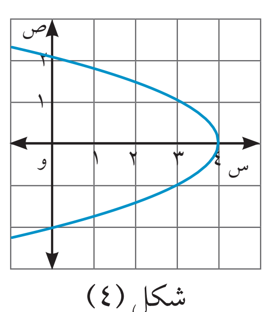
شكل (١)



شكل (٢)

شكل (٣)



شكل (٤)

الحل

شكل (١) يمثل دالة فى س.

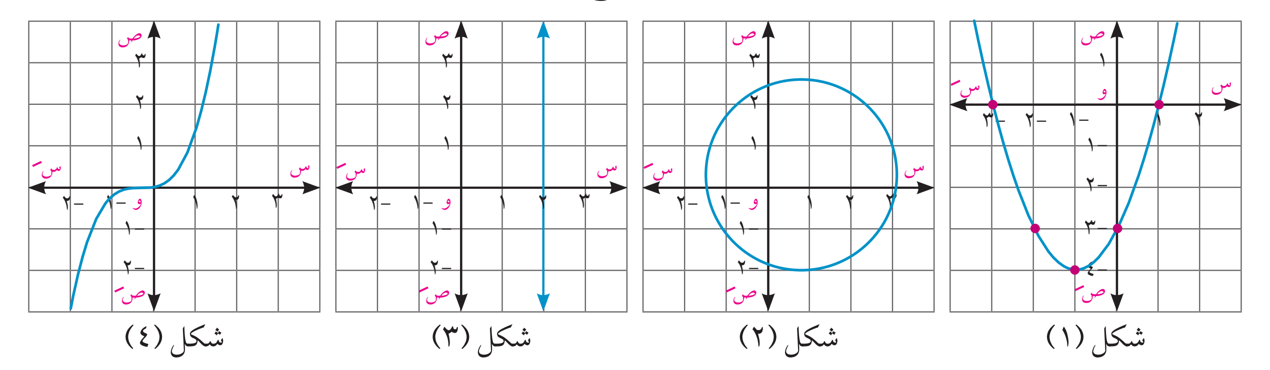
شكل (٢) لا يمثل دالة فى س لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البيانى فى عدد غير منتهٍ من النقط.

شكل (٣) يمثل دالة فى س .

شكل (٤) لا يمثل دالة فى س لأنه يوجد خط رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

حاول أن تحل

١ بين أى الأشكال الآتية تمثل دالة من س ⟵ ص مع ذكر السبب.



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

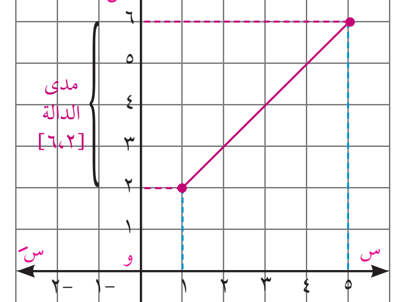


مثال

تعيين مدى الدالة بيانيًا

٢ إذا كانت د: [١، ٥] ⟵ ع حيث د(س) = س + ١

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.



الحل

الدالة د دالة خطية مجالها [١، ٥] تمثل بيانيًا بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (١، د(١)) ، (٥، د(٥)) أى النقطتين (١، ٢)، (٥، ٦).

مدى الدالة د = [٢، ٦]

وهو مجموعة الاحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

الدالة متعددة التعريف: *Piecewise-Defined Functions*



تعلم

الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

رسم الدالة متعددة التعريف:

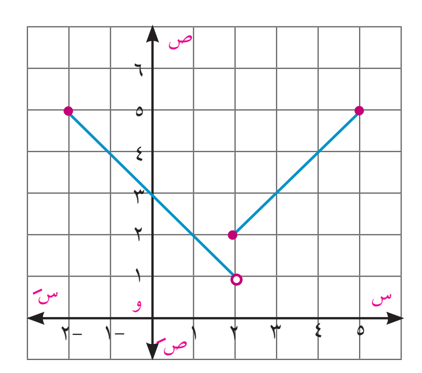
مثال

③ إذا كانت د(س) = { ٣ - س عندما -٢ ≤ س < ٢ ، س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥

عين مجال الدالة د ومثلها بيانيًا واستنتج من الرسم المدى.



الحل



الدالة د معرفة على فترتين وتتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: $د_1$(س) = ٣ -س عندما -٢≤ س < ٢ أي على الفترة [-٢، ٢[

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان

(-٢، ٥)، (٢، ١) مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ١)

لأن ٢∉ [-٢، ٢[كما فى الشكل المقابل.

القاعدة الثانية : $د_2$(س) = س عندما ٢≤س≤ ٥ أى على الفترة [٢، ٥]

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (٢، ٢)، (٥،٥)

ويكون مجال الدالة د = [-٢، ٢[∪ [٢، ٥]=[-٢، ٥]

لاحظ أن

في الشكل البياني الممثل للدالة د

مجال الدالة = [أ، ب]

مدى الدالة = [جـ، ى]



ويمكن من الرسم البيانى نستنتج أن:

مجال الدالة د = [-٢، ٥]

مدى الدالة د =]١، ٥]

حاول أن تحل

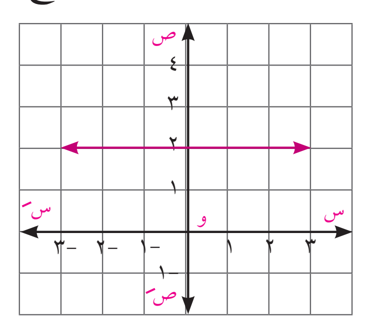
② إذا كانت د(س) = { س - ١ عندما -٢ ≤ س < ٠ ، س + ١ عندما س ≥ ٠

عين مجال الدالة ومثلها بيانيًا واستنتج من الرسم المدى.

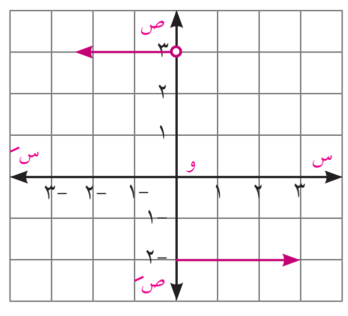


③ فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.

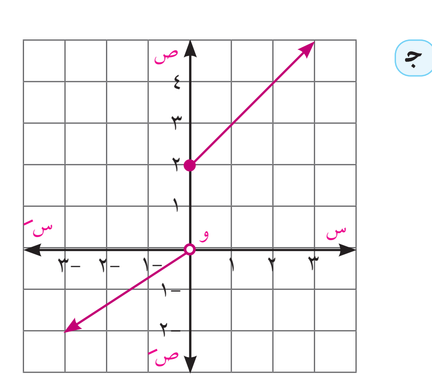
أ



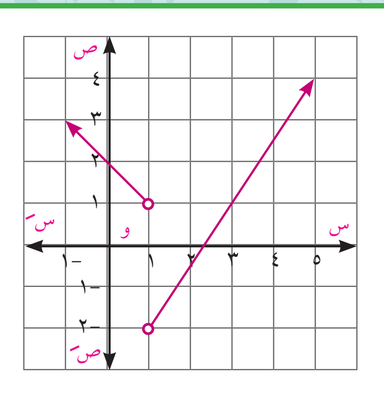
ب



ج



د



تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

تذكر أن

مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

مثال تعيين مجال الدالة *Determining Domains*

٤ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ د$_1$(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ - ٩}$ ب د$_2$(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$

ج د$_3$(س) = $\sqrt[3]{\text{س} - ٥}$

الحل

أ الدالة د$_1$ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = ٠ لذلك نضع س^٢ - ٩ = ٠ أى س = $\pm$٣

وعليه يكون مجال الدالة د$_1$ هو ع - {-٣، ٣}.

ب مجال الدالة د$_2$ هو جميع قيم س التى تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعى موجبًا أو صفرًا ، أى قيم س التى تجعل س - ٣ $\geqslant$ ٠

$\because$ س - ٣ $\geqslant$ ٠ $\therefore$ س $\geqslant$ ٣ $\therefore$ مجال د$_2$ = [٣ ، ∞[.

اشارة س-٣ - + ٣

ج د$_3$(س) = $\sqrt[3]{\text{س} - ٦}$ ، دليل الجذر عدد فردى مجال د$_3$ = ع

لاحظ:

إذا كانت د(س) = $\sqrt[ن]{\text{ر(س)}}$ حيث ن $\in$ ص$^+$، ن > ١ ، ر (س) كثيرة حدود

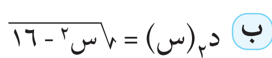
أولا: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ع

ثانيًا: عندما ن عدد زوجى فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط ر(س) $\geqslant$ ٠

حاول أن تحل

٤ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:-

أ د$_1$(س) = $\frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}$ ب د$_2$(س) = $\sqrt{\text{س}^٢ - ١٦}$



ج د$_3$(س) = $\sqrt[3]{\text{س} - ٥}$

تفكير ناقد:

إذا كان مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{٢}{س^٢ - ٦س + ك}$ هو ح -{٣} أوجد قيمة ك.

تعلم

العمليات على الدوال *Operations on Functions*

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالاهما $م_١$، $م_٢$ على الترتيب ، فإن:

١ ($د_١ \pm د_٢$) (س) = $د_١$ (س) $\pm$ $د_٢$(س) ، مجال ($د_١ \pm د_٢$) هو $م_١ \cap م_٢$

٢ ($د_١ . د_٢$) (س) = $د_١$ (س). $د_٢$(س) ، مجال ($د_١ . د_٢$) هو $م_١ \cap م_٢$

٣ ($\frac{د_١}{د_٢}$) (س) = $\frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢$ (س) $\neq$ ٠ مجال ($\frac{د_١}{د_٢}$) هو ($م_١ \cap م_٢$) - ف ($د_٢$)

حيث ف ($د_٢$) مجموعة أصفار $د_٢$

نلاحظ أنه فى جميع الحالات السابقة ، مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى $د_١$، $د_٢$ باستثناء القيم التى تجعل $د_٢$(س) = ٠ فى عملية القسمة.

مثال

٥ إذا كان د(س) = $س^٢$ - ٤س ، ر (س) = $\sqrt{س + ٢}$ ، ع(س) = $\sqrt{٤ - س}$

أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

أ (د + ر) ب (ر - ع)

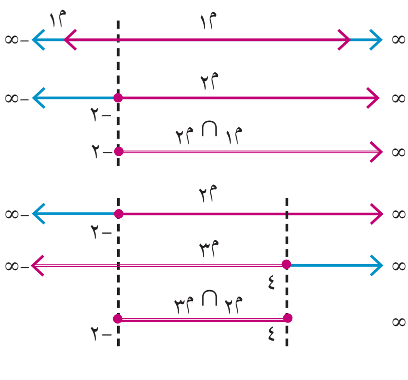
ج (د.ع) د ($\frac{ع}{د}$)

ثانيًا: احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

أ (ر - ع) (١) ب (د.ع) (٥) ج ($\frac{ع}{د}$) (٣)

الحل

أولاً: مجال د = $م_١$ = ح ، مجال ر = $م_٢$ = [-٢، ∞ [، مجال ع = $م_٣$ =]-∞ ، ٤]



أ (د + ر) (س) = د(س) + ر (س)

= $س^٢$ - ٤س + $\sqrt{س + ٢}$

ومجال الدالة (د + ر) هو ح ∩ [-٢،∞ [= [-٢، ∞ [

ب (ر - ع) (س) = ر(س) - ع (س)

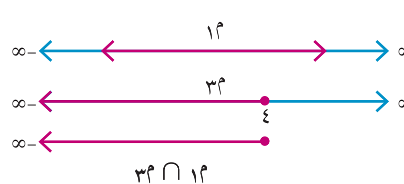
= $\sqrt{س + ٢}$ - $\sqrt{٤ - س}$

ومجال (ر - ع) هو: [-٢، ∞ [∩]-∞ ، ٤] = [-٢، ٤]

ج (د.ع) (س) = د(س).ع (س)

= ($س^٢$ - ٤س) $\sqrt{٤ - س}$

ومجال (د.ع) = ح ∩] -∞ ، ٤] =] -∞ ، ٤]



د) $(\frac{ع}{د})(س) = \frac{ع(س)}{د(س)} = \frac{\sqrt{٤ - س}}{س^٢ - ٤س}$

مجموعة أصفار الدالة د هى {٠، ٤}

مجال $(\frac{ع}{د}) =]-\infty ، ٤] \cap ع - \{٠، ٤\} =]-\infty ، ٤[- \{٠\}$

م١ ∩ م٣ - ص(د)

ثانيًا: القيم العددية:

أ) ∵ (ر - ع)(س) = $\sqrt{س+٢} - \sqrt{٤ - س}$ لكل س ∈ [-٢، ٤]

، ١ ∈ [-٢، ٤] ∴ (ر-ع)(١) = $\sqrt{٣} - \sqrt{٣}$ = صفر

ب) ∵ (د.ع)(س) = (س^٢ - ٤س) $\sqrt{٤ - س}$ لكل س ∈]-∞ ، ٤]

، ٥ ∉]-∞، ٤] ∴ (د.ع)(٥) غير معرفة

جـ) ∵ $(\frac{ع}{د})(س) = \frac{\sqrt{٤ - س}}{س^٢ - ٤س}$ لكل س ∈]-∞ ، ٤] - {٠}

، ٣ ∈]-∞، ٤] - {٠} ∴ $(\frac{ع}{د})(٣) = \frac{\sqrt{٤ - ٣}}{٩ - ١٢} = -\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

٥) إذا كانت د، ر دالتين حقيقيتين حيث:

د(س) = س^٢ - ٤ ، ر(س) = $\sqrt{س - ١}$ أوجد:

أ) مجال كل من الدوال الآتية: (د + ر) ، (د . ر) ، $(\frac{د}{ر})$ ، $(\frac{ر}{د})$

ب) أوجد القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

(د + ر)(٥) ، (د . ر)(٢) ، $(\frac{د}{ر})(٣)$ ، $(\frac{ر}{د})(-٢)$

عمل تعاونى

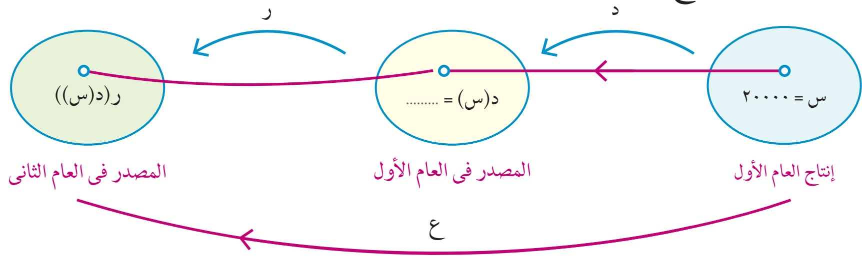
تركيب الدوال *Composition of Functions*

يقوم مصنع بتصدير جزء من إنتاجه يعطى بالعلاقة د(س) = $\frac{١}{٤}$ س حيث س عدد الوحدات المنتجة فى العام الأول، وكان عدد الوحدات المصدرة فى العام التالى يعطى بالعلاقة ر(د) = د + ١٥٠٠ حيث د عدد الوحدات المصدرة فى العام الأول.

ابحث (مع زميل) كم يكون عدد الوحدات المصدرة فى العام الثانى إذا كان إنتاج المصنع فى العام الأول

أ) ٢٠٠٠٠ وحدة ب) ٨٠٠٠٠ وحدة

للتحقق من صحة استنتاجك تتبع المخطط التالى:



تعلم

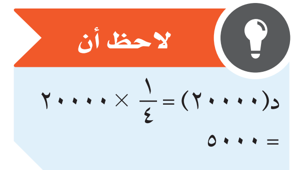
إذا كان مدى الدالة د تقاطع مجال الدالة ر لا يساوى ∅ فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين السابقتين وهى: **ع = ر ○ د**

وتقرأ ر تركيب د، أو ر بعد د حيث تطبق الدالة د أولاً ثم الدالة ر

ويكون ع(س) = (ر ○ د) (س)

= ر(د(س))

من المخطط السابق يكون:



أ ع (٢٠٠٠٠) = ر [د(٢٠٠٠٠)]

= ر(٥٠٠٠)

= ٥٠٠٠ + ١٥٠٠ = ٦٥٠٠ وحدة

ب ع (٨٠٠٠٠) = ...

فكر: هل عملية تركيب الدوال عملية إبدالية؟

➤ لبحث الإجابة عن هذا السؤال أوجد (د ○ ر) (س) ، (ر ○ د) (س) حيث د(س) = ٤س^{٢} ، ر(س) = ٢س

حاول أن تحل

(٦) إذا كان د(س) = س^{٢} + ٦ ، ر(س) = ٣س

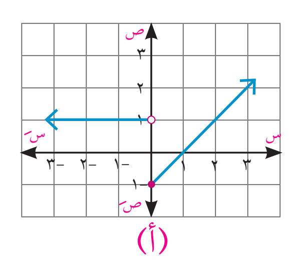
أولاً: أوجد (د ○ ر) (٣)

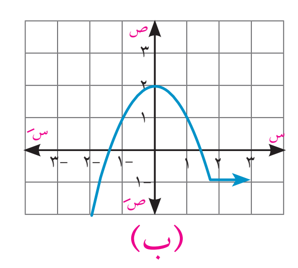
ثانياً: حدد قيم س التى تجعل (د ○ ر) (س) = ٤٢

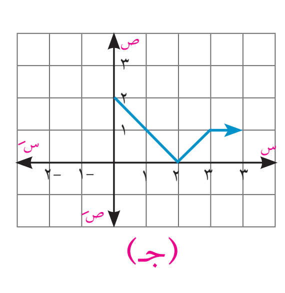


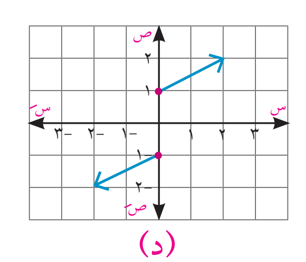
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) أى من الأشكال البيانية الآتية لا تمثل دالة فى س:


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٢) جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة:

أ ص = ٣س + ١

ب ص = س^{٢} - ٤

جـ س = ص^{٢} - ٢

د ص = حا س

أجب عن ما يأتى:

③ حدد مجال الدالة د حيث د(س) = { س - ١ عندما ٢ < س ≤ ٤
-١ عندما -٢ ≤ س ≤ ٢ }

ثم ارسم الشكل البيانى للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

④ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

د(س) = { س + ٣ عندما س ≥ ٢
٢س - ١ عندما س < ٢ }

ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

⑤ إذا كانت د(س) = { ٢س + ٣ عندما -٢ ≤ س < ٠
١ - س عندما ٠ ≤ س ≤ ٤ }

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

⑥ إذا كان: د(س) = { -٤س + ٣ عندما س < ١
- $س^٣$ عندما ١ ≤ س ≤ ٢
$س^٢$ - ١ عندما س > ٢ }

أوجد:

أ د(صفر) ب د(١) ج د(٢)

⑦ الربط بالميكانيكا: إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع(ن) بالسنتيمتر / ثانية تعطى بالدالة ع حيث:

ع(ن) = { ٨ ن عندما ٠ ≤ ن ≤ ١٠
٨٠ عندما ١٠ < ن < ٢٠٠
-٤ن + ٨٨٠ عندما ٢٠٠ ≤ ن ≤ ٢٢٠ }

حيث ن الزمن بالثانية، أوجد:

أ ع(١٠) ب ع(١٥٠) ج ع(٢١٠)

⑧ الربط بالتجارة: تمثل الدالة د ، حيث:

د(س) = { $\frac{٥}{٢}$ س عندما ٠ ≤ س ≤ ٥٠٠٠
٢س + ٢٥٠٠ عندما ٥٠٠٠ < س ≤ ١٥٠٠٠
$\frac{٣}{٢}$س + ١٠٠٠٠ عندما ١٥٠٠٠ < س ≤ ٦٠٠٠٠ }

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

أ د(٥٠٠٠) ب د(١٠٠٠٠) ج د(٥٠٠٠٠)

(٩) عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ) $د(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ب) $د(س) = \frac{س + ١}{س^٣ + ١}$

جـ) $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ د) $د(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$

هـ) $د(س) = \frac{٣س}{\sqrt{٢س - ١}}$ و) $د(س) = \frac{١}{س} + \frac{١}{س + ٢}$

(١٠) إذا كان: $د_١$: ع ⟵ ع حيث $د_١(س) = ٣س - ١$ ،

$د_٢$: [-٢، ٣] ⟵ ع حيث $د_٢(س) = ٢س + ٤$

فأوجد: $(د_١ + د_٢)(س)$ ، $(د_١ - د_٢)(س)$ مبينًا مجال كل دالة.

(١١) إذا كان: $د_١(س) = س + ٢$ ومجال $د_١$ = [-٣، ٤] ، $د_٢(س) = س^٢ + ٢س$ ومجال $د_٢$ = [-١ ، ٣] ،

أوجد: $(د_١ + د_٢)(س)$ ، $(د_٢ - د_١)(س)$ ، $(\frac{د_١}{د_٢})(س)$ ، $(\frac{د_٢}{د_١})(س)$ مبينًا مجال كل دالة.

(١٢) إذا كان: $د(س) = ٣س + ١$ ، $ر(س) = س^٢ - ٥$ ، $ق(س) = س^٣$ أوجد:

أ) (د ∘ ر) (٢) ب) (ر ∘ د) (-٣) جـ) (ر ∘ ق) (١) د) (ق ∘ د) (-٢)

(١٣) إذا كان: $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $ر(س) = س + ٣$

أوجد: (د ∘ ر) (س) ، (ر ∘ د) (س) .

(١٤) إذا كان: $د(س) = س^٢ - ٣$ ، $ر(س) = \sqrt{س - ٢}$

أوجد: (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة ثم أوجد (د ∘ ر) (٣)

١ - ٢ بعض خواص الدوال

Some Properties of Functions

قد يتميز الشكل البيانى للدالة د حيث ص = د(س) بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، و يمكن استخدامها في دراسة الدوال وتطبيقاتها وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

سوف تتعلم

- التماثل فى منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.
- الدوال الأحادية.

المصطلحات الأساسية

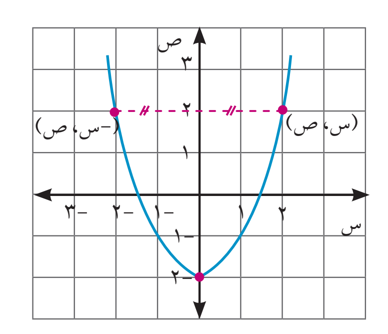
- تماثل *Symmetry*
- دالة زوجية *Even Function*
- دالة فردية *Odd Function*
- دالة أحادية *One – to –One Function*
- خط أفقى *Horizontal Line*

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب

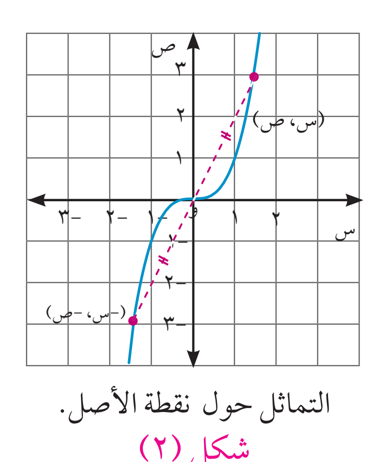
تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طى الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل.



التماثل حول محور الصادات

شكل (١)



التماثل حول نقطة الأصل.

شكل (٢)

فى شكل (١):

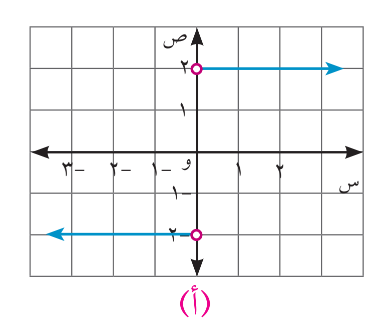
تكون النقطة (- س ، ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

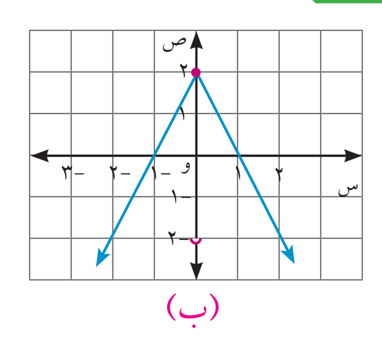
فى شكل (٢):

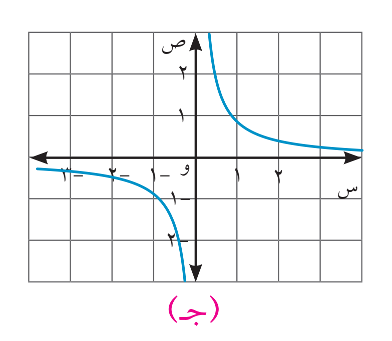
يوضح الشكل البيانى للعلاقة بين س ، ص تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة (-س، -ص) هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة على نفس المنحنى.

حاول أن تحل

١) فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.


(أ)


(ب)


(جـ)

تفكير ناقد:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ فسر إجابتك.

الدوال الزوجية والدوال الفردية: *Even and Odd Functions*


تعلم

الدالة الزوجية: يقال للدالة د: س ⟵ ص إنها دالة زوجية إذا كان د (- س) = د (س)، لكل س ، -س ∈ س
ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة د: س ⟵ ص إنها دالة فردية إذا كان د (- س) = - د (س)، لكل س ، -س ∈ س
ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

لاحظ: كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط إنتماء العنصرين س ، -س إلى مجال الدالة، وإذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد د(-س)

مثال

(١) ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتى من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

أ د (س) = س^{٢} ب د(س) = س^{٣} جـ د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ د د(س) = جتا س

الحل

أ د (س) = س^{٢} ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س)= (-س)^{٢} = س^{٢}

أى أن: د(-س) = د(س) ∴ د دالة زوجية

ب د(س) = س^{٣} ، مجال د = ع

∵ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س) = (-س)^{٣} = - س^{٣}

أى أن: د(-س)= -د(س) ∴ د دالة فردية

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة د: ع ⟵ ع ، د(س) = أ س^{ن} حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ ص$^{+}$ دالة القوى ،
وتكون الدالة زوجية عندما ن عدد زوجي ، فردية عندما ن عدد فردى.

ج) د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ ، مجال د = [-٣، ∞ [

لاحظ أن ٤ ∈ [-٣، ∞ [بينما -٤ ∉ [-٣ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د) د(س) = حتا س ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع يكون:

د(-س) = حتا (-س) = حتا س

أى أن: د(-س) =د(س) ∴ د دالة زوجية

تذكر أن

حا (-س) = - حا س

حتا (-س) = حتا س

طا (-س) = - طا س

حاول أن تحل

٢) ابحث نوع الدالة د فى كل مما يأتى من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ) د (س) = جا س

ب) د (س) = س^{٢} + جتا س

ج) د(س) = س^{٣} - جا س

د) د(س) = س^{٢} جتا س

هـ) د(س) = س^{٣} جا س

و) د(س) = س^{٣} جتا س

ز) د(س) = س^{٣} + س^{٢}

ح) د(س) = جا س + جتا س

ط) د(س) = جاس جتا س

ماذا تستنتج؟

خواص هامة:

إذا كان كل من: د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالة زوجية ، وكان كل من: ر$_{١}$، ر$_{٢}$ دالة فردية ، فإن:

١) د$_{١}$ + د$_{٢}$ دالة زوجية

٢) ر$_{١}$+ ر$_{٢}$ دالة فردية.

٣) د$_{١}$ × د$_{٢}$ دالة زوجية

٤) ر$_{١}$× ر$_{٢}$ دالة زوجية.

٥) د$_{١}$ × ر$_{٢}$ دالة فردية

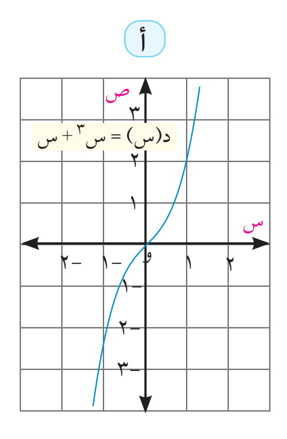
٦) د$_{١}$+ ر$_{٢}$ ليست زوجية وليست فردية.

باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك فى بند حاول أن تحل (٢)

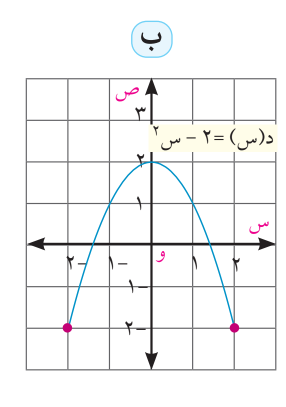
مثال

٢) يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًّا.

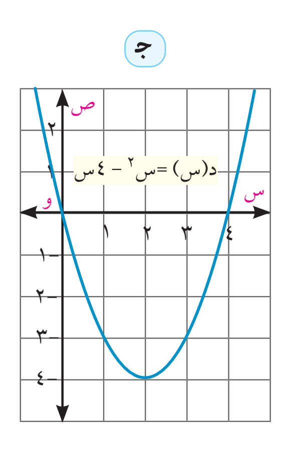
أ



ب



ج



الحل

أ د (س) = $س^٣$ + س، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د = ع، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ؛ أى أن الدالة فردية

∵ كل س ، -س ∈ ع ∴ د (-س) = $(-س)^٣$ + (-س)

بالتبسيط: د (-س) = - $س^٣$ - س

نأخذ (-١) عاملًا مشتركًا د (-س) = - ($س^٣$ + س)

د (-س) = - د (س)

أى أن الدالة فردية.

ب د (س) = ٢ - $س^٢$ ، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن

مجال د = [-٢، ٢] ، ومنحنى الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية

∵ كل س ، -س ∈ [-٢، ٢] ∴ د (-س) = ٢ - $(-س)^٢$

بالتبسيط د (-س) = ٢ - $س^٢$

د (-س) = د (س) أى أن الدالة زوجية

جـ د (س) = $س^٢$ - ٤س ، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د= ع ، ومنحنى الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات، وليس متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل؛

أى أن الدالة ليست زوجية وليست فردية:

∵ كل س ، -س ∈ ع ∴ د (-س) = $(-س)^٢$ - ٤ (-س)

بالتبسيط د (-س) = $س^٢$ + ٤س ≠ د(س) ∴ د ليست زوجية

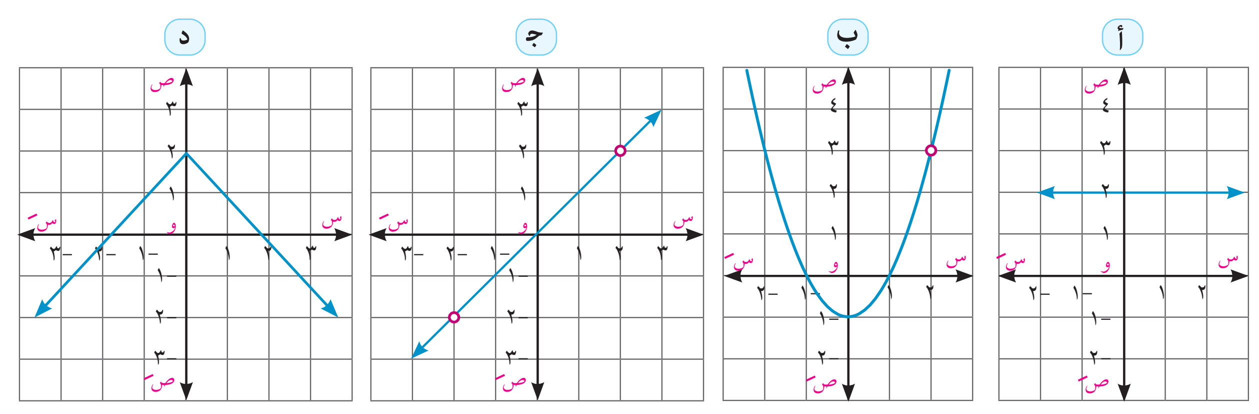
ولكن - د (س) = - $س^٢$ + ٤ س

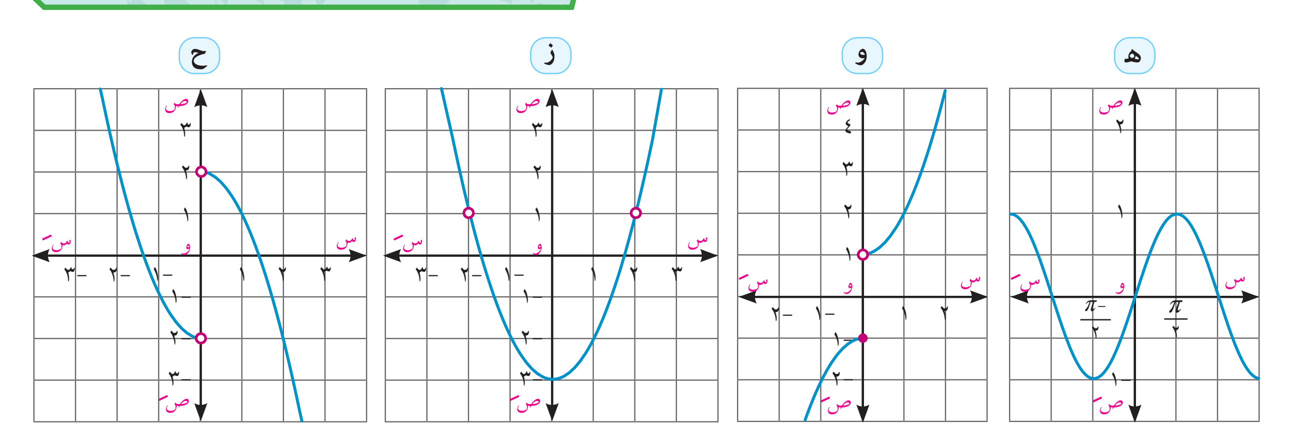
لذلك فإن د (-س) ≠ - د (س) ∴ د ليست فردية

أى أن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

حاول أن تحل

٣ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.





٩ حاول أن تحل

٤ مثِّل الدالة د حيث د (س) = { س + ٢ حيث س ⩾ -٢ ، - س - ٢ حيث س < -٢ } بيانيًا.

ثم بيِّن: هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك؟ وتحقق من إجابتك جبريًّا.

الدالة الأحادية: One - to - One Function (Injective Function)

تعريف

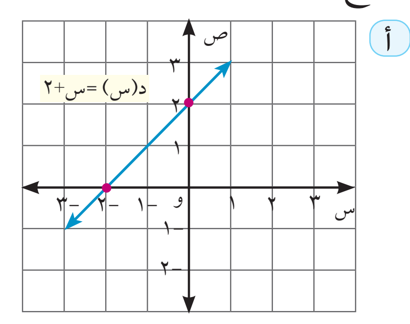
الدالة د: س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

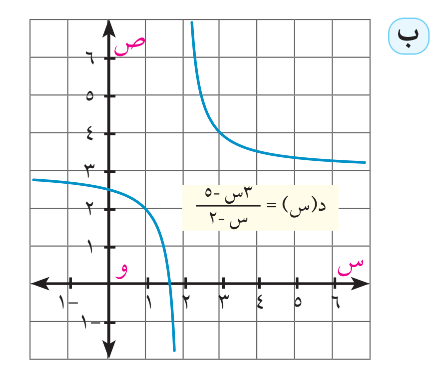
لكل أ ، ب ∈ س ، د (أ) = د (ب) فإن أ = ب

أو لكل أ ≠ ب فإن د (أ) ≠ د (ب)

مثال

٣ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د:س ⟵ ص ، أثبت أن د دالة أحادية.





الحل

أ د(س) = س + ٢ ، مجال د = ع

لكل أ ، ب ∈ ع فإن د (أ) = أ + ٢ ، د (ب) = ب + ٢

بوضع د (أ) = د (ب) ∴ أ + ٢ = ب + ٢

وبحذف ٢ من الطرفين ∴ أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية

ب) د(س) = $\frac{٣س-٥}{س-٢}$ ، مجال د= ع - {٢}

لكل أ ، ب ∈ ع - {٢} فإن د(أ) = $\frac{٣أ-٥}{أ-٢}$ ، د(ب) = $\frac{٣ب-٥}{ب-٢}$

بوضع د (أ) = د(ب) ∴ $\frac{٣أ-٥}{أ-٢} = \frac{٣ب-٥}{ب-٢}$

بالضرب التبادلى ٣أب - ٦أ - ٥ب + ١٠ = ٣أب - ٦ب - ٥أ + ١٠

بالحذف والتبسيط ∴ أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية.

تعلم

إختبار الخط الأفقى *Horizontal – Line Test*

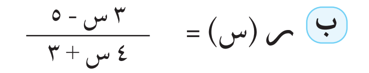
تكون الدالة د: س ⟵ ص دالة إحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازى لمحور السينات) عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة.

حاول أن تحل

٥) فى بند حاول أن تحل (٣) ص (١٩)، بين الأشكال البيانية التى تمثل دالة إحادية.

٦) أثبت أن د: س ⟵ ص دالة إحادية حيث:

أ) د(س) = ٢س - ٣



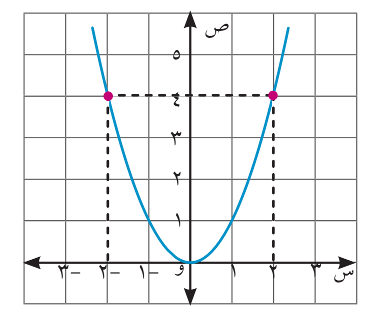
ب) ر(س) = $\frac{٣س-٥}{٤س+٣}$

مثال

٤) بيِّن أن الدالة د:س ⟵ ص حيث د (س) = $س^٢$ ليست دالة أحادية.



الحل



د (٢) = ٤ ، د (-٢) = ٤ ∴ د (-٢) = د (٢) = ٤

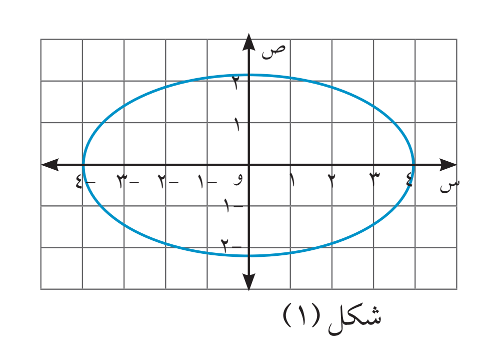
∵ -٢ ≠ ٢ ∴ د ليست أحادية

ونلاحظ أن الخط الأفقى عند ص = ٤ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما -٢ ، ٢.

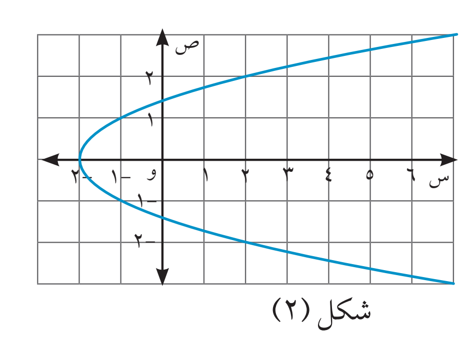


تمـــارين ١ - ٢

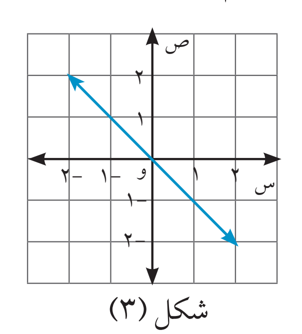
١) اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسِّر إجابتك.



شكل (١)

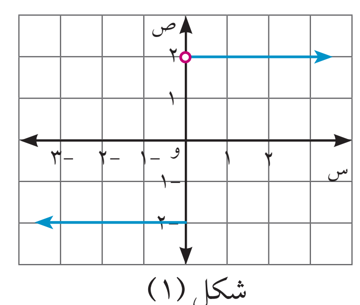


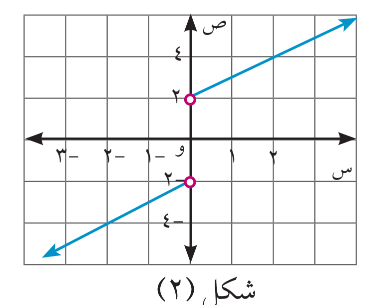
شكل (٢)

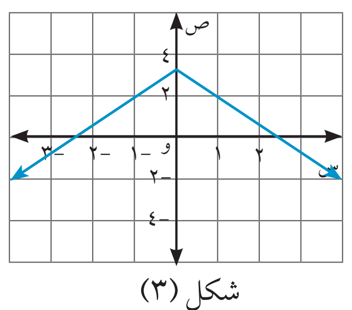


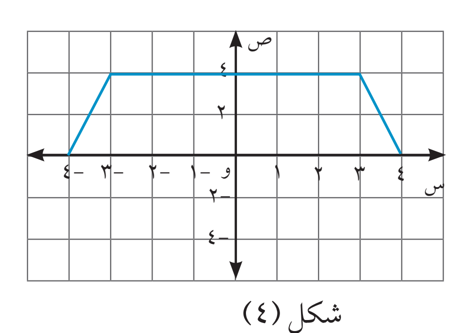
شكل (٣)

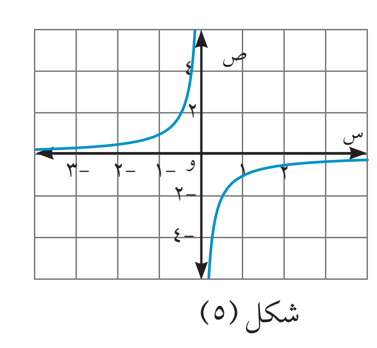
٢ أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

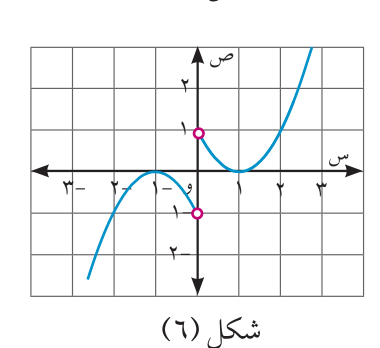

شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)


شكل (٤)


شكل (٥)


شكل (٦)

٣ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د(س) = $س^{٤} + س^{٢} - ١$ **ب** د(س) = $٣ س - ٤ س^{٣}$ **جـ** د(س) = $س^{٣} - \frac{١}{س}$

د د(س) = $س^{٢} - ٣س$ **هـ** د(س) = $\frac{س^{٣} + ٢}{س - ٣}$ **و** د(س) = س حتا س

ز د(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٦}$ **ح** د(س) = $\frac{س^{٢}}{س + ١}$ **ط** د(س) = $(س^{٢} + ١)^{٣}$

٤ إذا كانت $د_{١}$، $د_{٢}$، $د_{٣}$ دوال حقيقية حيث $د_{١}$(س) = $س^{٥}$، $د_{٢}$(س) = حاس، $د_{٣}$(س) = $٥س^{٢}$،

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك

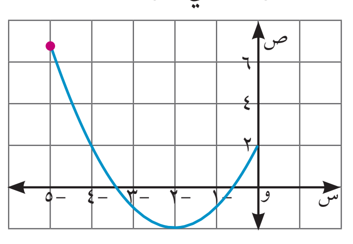
أ $د_{١} + د_{٢}$ **ب** $د_{١} + د_{٣}$ **جـ** $د_{١} \times د_{٢}$ **د** $د_{٣} \times د_{٢}$

٥ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د(س) = $(٣ - س)^{٢}$ ، ر(س) = $(س + ٣)^{٢}$

بين أى الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك.

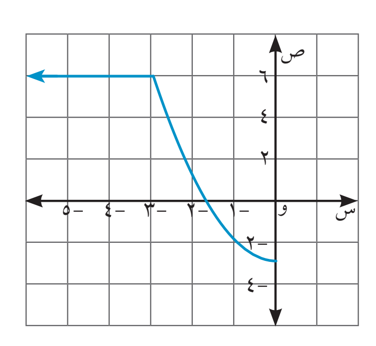
أ د + ر **ب** د - ر **جـ** د . ر **د** $\frac{د}{ر}$

٦ أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:

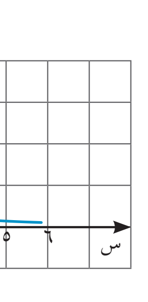


شكل (١)

شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

أولًا: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) في كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) في كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا: حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة وبين أى الأشكال البيانية تمثل منحنى دالة احادية.

٧ في كل من الدوال المعرفة كما يلى حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

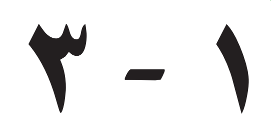
أ د(س) = ٣ س + ١

ب د (س) = $\frac{٢س + ١}{س - ٢}$

جـ د(س) = س^{٣} + ١

د د (س) = ٢س^{٢} - س - ٣

هـ د(س) = س^{٤} + ٢س^{٢} + ١



١ - ٣ اطراد الدوال

Monotonicity of Functions

فكر و ناقش

يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة فى أحد الأيام ، لاحظ التغير فى درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

أ فترات تناقص درجات الحرارة.

ب فترات تزايد درجات الحرارة

ج فترات ثبات درجات الحرارة.

درجات الحرارة (°م) — الزمن

تساعدنا صفات منحنيات الدوال فى معرفة سلوك الدالة د وتحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت د(س) كلما زادت س وهو مايعرف باطراد الدالة.

سوف تتعلم

- اطراد الدوال.
- استخدام البرامج الرسومية مثل (Geogebra) في رسم منحنى دالة

المصطلحات الأساسية

- اطراد. Monotony
- دالة تزايدية. Increasing Function
- دالة تناقصية. Decreasing Function
- دالة ثابتة. Constant Function

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

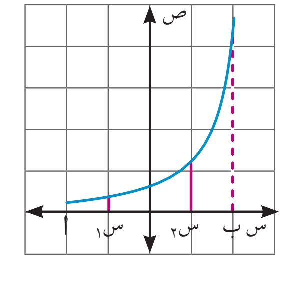
تعلم

تزايد الدالة :

يقال للدالة د أنها تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈]أ ، ب[حيث: $س_٢ > س_١$

فإن: $د(س_٢) > د(س_١)$

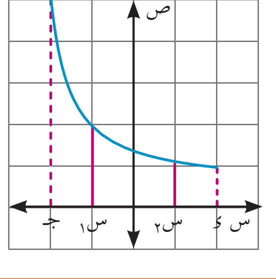


تناقص الدالة :

يقال للدالة د أنها تناقصية فى الفترة]جـ ، ى[

إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈]جـ ، ى[حيث: $س_٢ > س_١$

فإن: $د(س_٢) < د(س_١)$

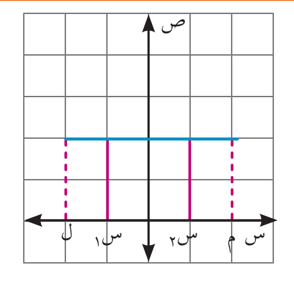



ثبوت الدالة :

يقال للدالة د أنها ثابتة فى الفترة]ل ، م[

إذا كان لكل $س_١$، $س_٢$ ∈]ل ، م[حيث: $س_٢ > س_١$

فإن: $د(س_٢) = د(س_١)$



مثال

١) ابحث اطراد الدالة الممثلة فى الشكل البيانى المقابل.



الحل

- الدالة تناقصية فى الفترة]-∞، ٠[
- الدالة تزايدية فى الفترة]٠، ٢[
- الدالة ثابتة فى الفترة]٢،∞ [

حاول أن تحل

١) فى الشكل المقابل:

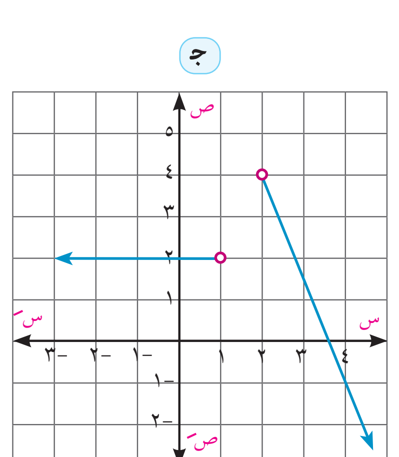
ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.



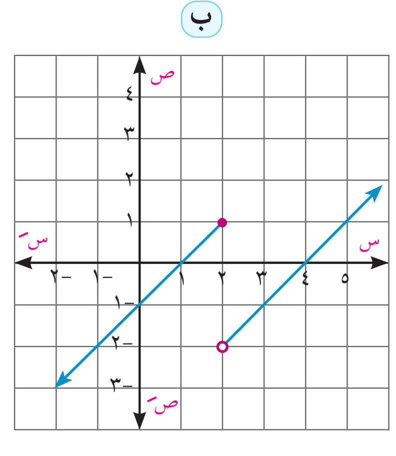
مثال

٢) يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: س ⟵ ص ، حيث ص = د(س) استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.

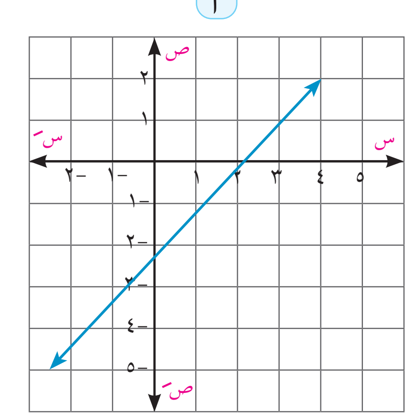
ج



ب



أ



الحل

أ) مجال د = ع =]-∞، ∞[، مدى د =]-∞، ∞[الدالة تزايدية فى]-∞ ، ∞[

ب) مجال د =]-∞ ، ٢] U [٢،∞ [=]-∞، ∞ [

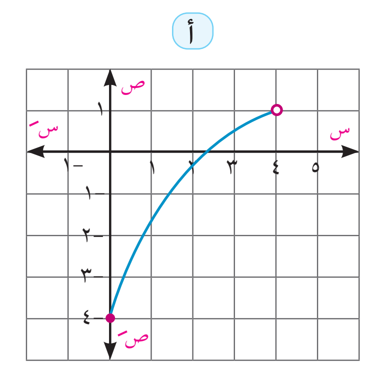
الدالة تزايدية فى]-∞، ٢[، تزايدية أيضًا فى] ٢ ،∞ [، مدى الدالة = ع

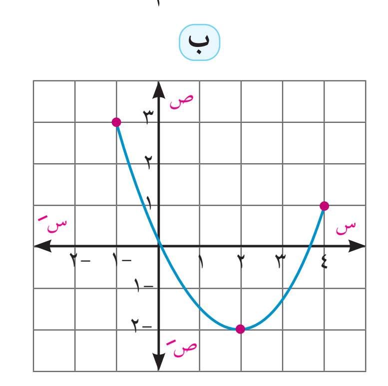
ج) مجال د=]-∞ ، ١[U] ٢،∞ [، مدى د =]- ∞، ٤[

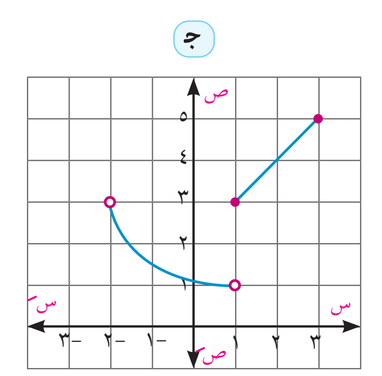
الدالة ثابتة فى]-∞ ، ١[، وتناقصية فى] ٢ ،∞ [

حاول أن تحل

٢ في كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها:

أ


ب


ج


تفكير ناقد: أي من الأشكال السابقة يمثل دالة إحادية ؟ فسر إجابتك

استخدام البرامج الرسومية فى دراسة خواص الدوال

تتعدد البرامج الرسومية لتمثيل الدوال بيانيًا ، ومن أشهرها برنامج *GeoGebra* المجانى للتابلت أو الحاسوب.

نشاط

استخدم برنامج جيوجبرا في عمل التحويلات الهندسية للدوال

باستخدام برنامج *GeoGebra* مثل بيانيًا الدالة د حيث: د(س) = س^{٣} - ٣س + ٢ ، ومن الرسم:

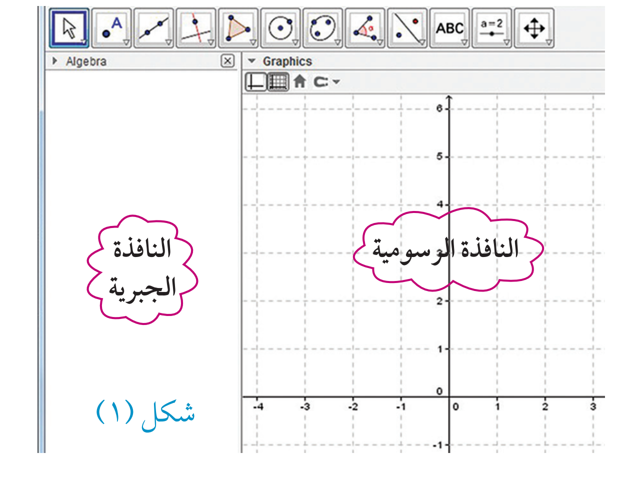
أ أوجد مجال ومدى الدالة.

ب ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

لتمثيل الدالة بيانيًّا اتبع الخطوات التالية:

١- افتح نافذة الجبر والرسم البيانى من برنامج (*GeoGebra*)

ثم إضغط *Graphics* واختر لتصل إلي النافذة المبينة فى شكل (١).

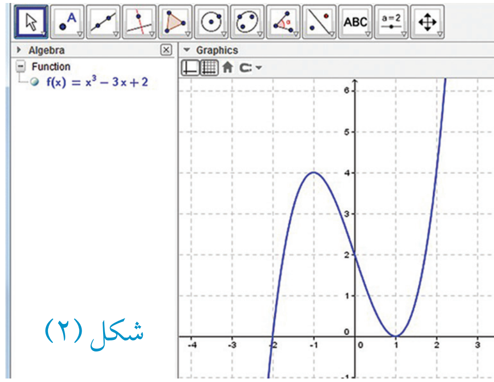


شكل (١)

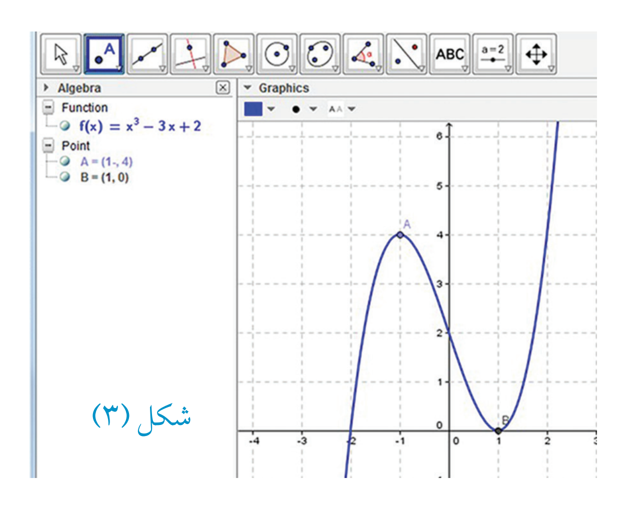
٢- فى النافذة الجبرية اكتب قاعدة الدالة د(س) = س^{٣} - ٣س + ٢ بمربع الادخال (input) على النحو التالي:

إبدأ ← 2 + χ 3 - 3 ^ χ

ثم اضغط فيظهر فى النافذة البيانية منحنى الدالة، وفى النافذة الجبرية قاعدة الدالة كما فى شكل (٢)



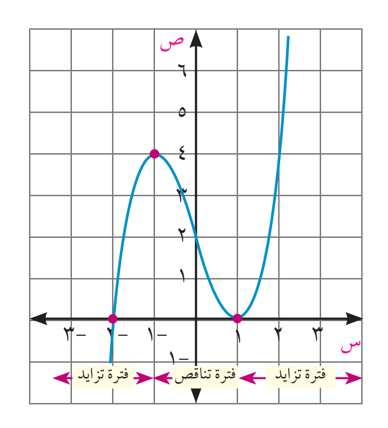
شكل (٢)



شكل (٣)

٣- لتحديد نقط على منحنى الدالة اختر من شريط الأدوات ثم نقطة جديدة من القائمة المنسدلة، حرك المؤشر حتى تصل إلى موضع النقطة المراد تحديدها على المنحنى واضغط إدخال لتظهر النقطة على المنحنى فى النافذة الرسومية كما يظهر إحداثيى النقطة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٣).

من الشكل البيانى للدالة نجد:



أ) مجال د =]- ∞،∞ [، مدى د=] - ∞، ∞[

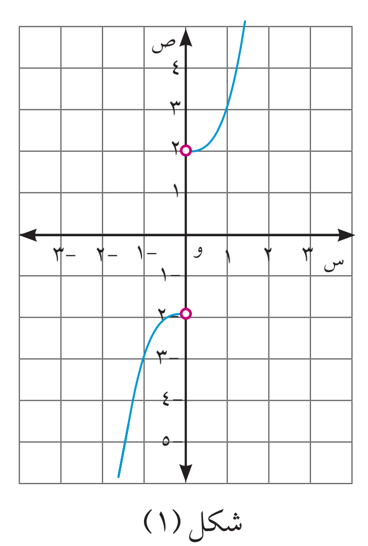
ب) الدالة تزايدية فى]- ∞ ، -١[، تناقصية فى]-١ ، ١[، تزايدية فى]١ ، ∞[
كما أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

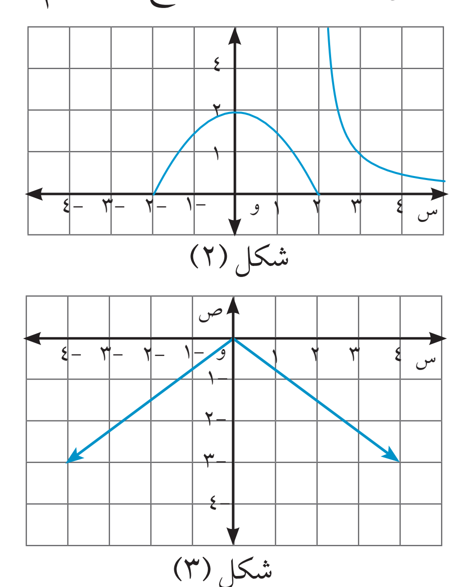
لاحظ:
النقطة (٠، ٢) هى نقطة تماثل لمنحنى الدالة كما أن الدالة د ليست دالة أحادية.

تدريب على النشاط
باستخدام برنامج *Geogebra* ارسم منحنى الدالة د: د(س) = ٣س - س^{٣} ومن الرسم ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غيرذلك.

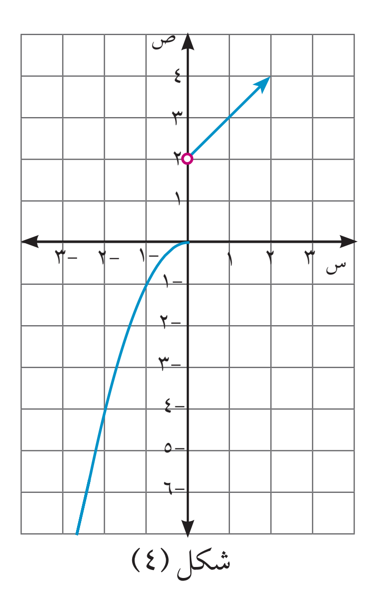
تمارين ١ - ٣

١) الأشكال الآتية تمثل الشكل البيانى لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الإطراد:


شكل (١)


شكل (٢)

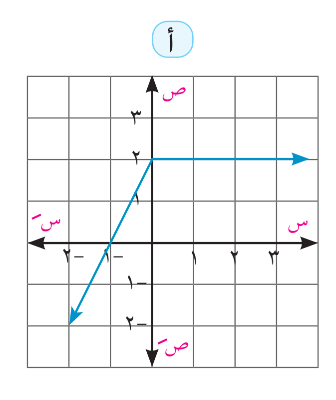
شكل (٣)


شكل (٤)

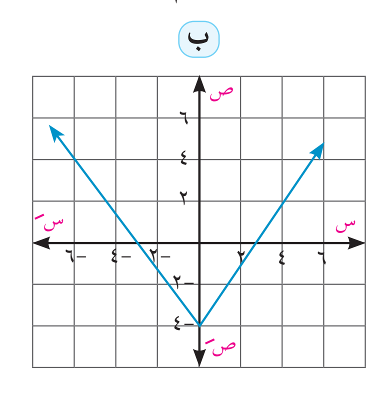


② حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.

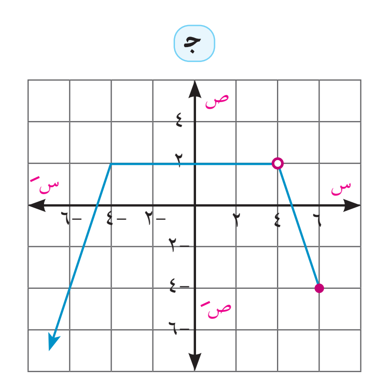
أ



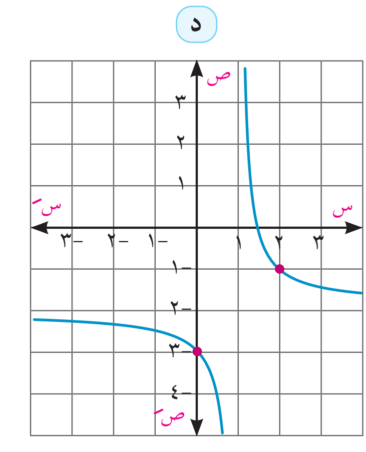
ب



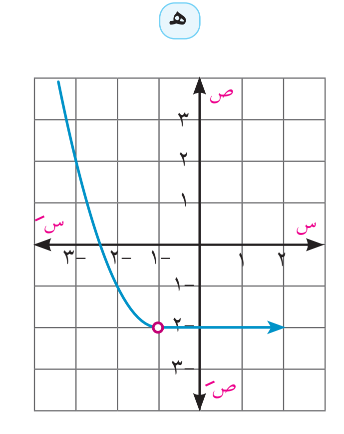
ج



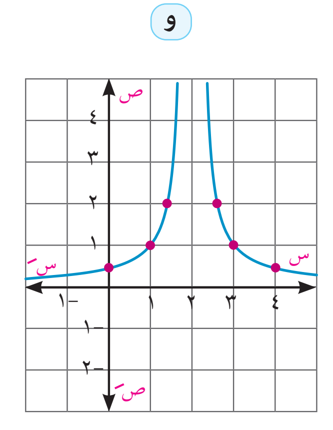
د



هـ



و



③ اذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ع

د(س) = { ٤ - س عندما -٢ ≤ س < ١
　　　　　س عندما ١ ≤ س ≤ ٦

أ ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

ب هل د دالة احادية؟ فسر اجابتك.

④ تفكير ابداعي

إذا كانت الدالة د في تزايد مستمر أو تناقص مستمر على مجالها هل تكون د دالة أحادية؟ فسر إجابتك.

١ - ٤ التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية

Graphical Representation of functions, Geometriaal Transformations

سوف تتعلم

- دوال كثيرة الحدود (الدالة الخطية - الدالة التربيعية - الدالة التكعيبية)
- دالة المقياس (القيمة المطلقة)
- الدالة الكسرية
- استخدام التحويلات الهندسية للدالة د فى رسم المنحنيات

ص = د(س) + أ

ص = د(س + أ)

ص = د(س + أ) + ب

ص = - د(س)

ص = أ د (س)

ص = أ د(س +ب) + جـ

- التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

- تحويل. *Transformation*
- انتقال. *Translation*
- انعكاس. *Reflection*
- رأسى *Vertical*
- أفقى *Horizontal*
- خط تقارب *Asymptutes*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

الدالة كثيرة الحدود *Polynomial Functions*

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التى قاعدتها على الصورة:

$$د(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + أ_٣ س^٣ + ... + أ_ن س^ن$$

حيث: $أ_٠ ، أ_١ ، أ_٢ ، أ_٣ ، ...... ، أ_ن \in ع ، أ_ن \neq ٠ ، ن \in ط$

وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع (أو مجموعة جزئية منها)، وتسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن، ودرجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

لاحظ:

١- إذا كان $د(س) = أ_٠ ، أ_٠ \neq ٠$ فإن د تسمى كثيرة الحدود الثابتة.

٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالًا خطية ، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالًا تربيعية ، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالًا تكعيبية.

٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت ، نحصل على دالة كثيرة الحدود.

٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هى الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.

٥- تساوى دالتا كثيرتا الحدود د، ر إذا كان لهما الدرجة نفسها وكانت معاملات قوى س المتناظرة فيهما متساوية.

مثال

١ إذا كان د ، ر كثيرتا حدود حيث $د(س) = (أ س + ٥)^٢$،
$ر(س) = ٩س^٢ + ٣٠ س + جـ - ٤$ ، وكان د(س) = ر(س) أوجد قيمتى أ ، جـ.

الحل

$د(س) = (أ س + ٥)^٢ = أ^٢ س^٢ + ١٠أ س + ٢٥$

$\because$ د(س) = ر(س) $\therefore$ معاملات قوى س المتناظرة متساوية

بمقارنة معامل س : ١٠أ = ٣٠ $\therefore$ أ = ٣

بمقارنة الحد المطلق: جـ - ٤ = ٢٥ $\therefore$ جـ = ٢٩

حاول أن تحل

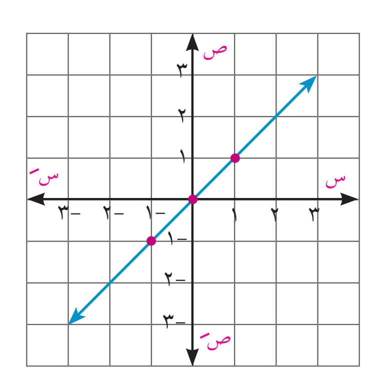
١ إذا كان $د(س) = (أ + ٢ ب) س^٣ - جـ س + ٤$ ، $ر(س) = ٧س^٣ + ٥س + (أ - ب)$
أوجد قيم أ، ب ، جـ التى تجعل د(س) = ر(س)

رسم منحنيات الدوال *Graphs of Functions*

أولًا: دوال كثيرة الحدود *Polynomial Functions*



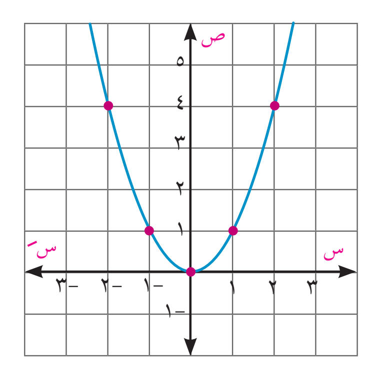
فيما يلي التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود:



١) د(س) = س

الدالة د تربط العدد بنفسه، و يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)، وميله = ١

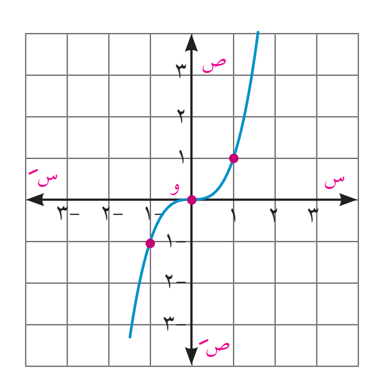
(تحقق من: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)



٢) د(س) = $س^٢$

الدالة د تربط العدد بمربعه، و يمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل حول محور الصادات ، ونقطة رأس المنحنى هى (٠، ٠)

(تحقق من: مدى د = ع ، د زوجية ، د تناقصية فى]-∞ ، ٠[، تزايدية فى]٠،∞ [)



٣) د(س) = $س^٣$

الدالة د تربط العدد بمكعبه، و يمثلها منحنى نقطة تماثله هى (٠، ٠)

(تحقق من: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)



② ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث:

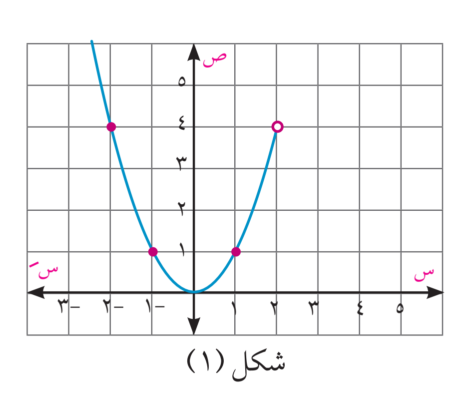
د(س) = { $س^٢$ عندما س < ٢ ، ٤ عندما س > ٢ }



١) عندما س < ٢ ، د(س) = $س^٢$

نرسم د(س) = $س^٢$ لكل س]-∞ ، ٢[

مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ٤) كما فى شكل (١)

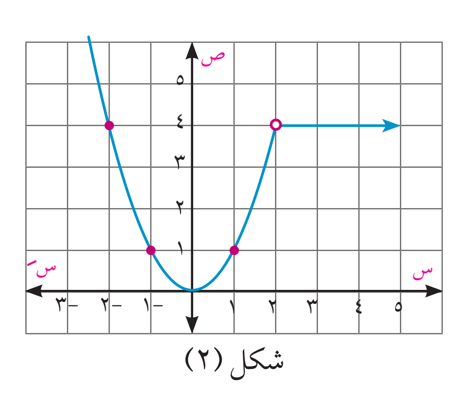

شكل (١)

٢) عندما س > ٢ ؛ د(س) = ٤

ترسم الدالة الثابتة د(س) = ٤ لكل س]٢،∞[

على نفس الشكل البيانى كما فى شكل (٢)

لاحظ أن مجال الدالة د = ح - {٢} ، ومدى د = [٠ ، ∞[



شكل (٢)

حاول أن تحل

٢) ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

د (س) = { س^٢ عندما س < ٠ ، س عندما س ⩾ ٠ } ثم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.



تعلم

دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة): *The Absolute Value Function*

أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س|، س ∈ ح

وتعرف كما يلي:

د(س) = { س عندما س ⩾ ٠ ، - س عندما س < ٠ }

لاحظ أن: |- ٣| = |٣| = ٣ ، |٠| = ٠ ، $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2}$ = ٢

أى أن: |س|⩾٠ ، |-س| = |س| ، $\sqrt{س^2}$ = |س|

الدالة د يمثلها شعاعان يبدأن من النقطة (٠، ٠) ميل أحدهما = ١ ، وميل الآخر = -١

(تحقق من: مدى د = [٠ ، ∞[، د زوجية ، د تناقصية فى]-∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠،∞[ )

تعلم

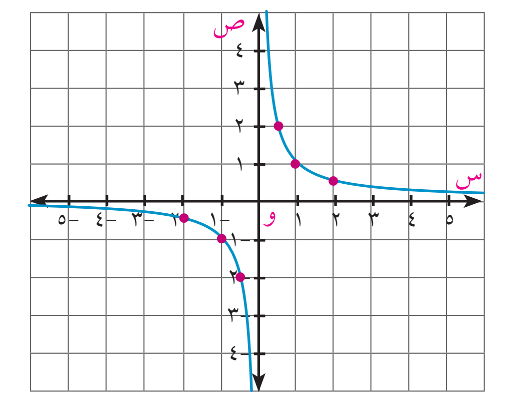
الدالة الكسرية



أبسط صورة للدالة الكسرية هى:

د(س) = ١/س ، س ∈ ح - {٠}

الدالة د تربط العدد بمعكوسه الضربى ، ويمثلها منحنى نقطة تماثله (٠، ٠) ويتكون من جزأين أحدهما يقع فى الربع الأول والآخر يقع فى الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولايقطعهما (س = ٠، ص = ٠ خطا تقارب للمنحنى)



(تحقق من: مدى د = ح - {٠} ، د فردية ، د تناقصية فى]-∞،٠[، وتناقصية أيضًا فى]٠،∞[)

حاول أن تحل

٣) ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د(س) = { |س| عندما س ⩽ ٠ ، ١/س عندما س > ٠ }

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال *Transformations of Graphs*

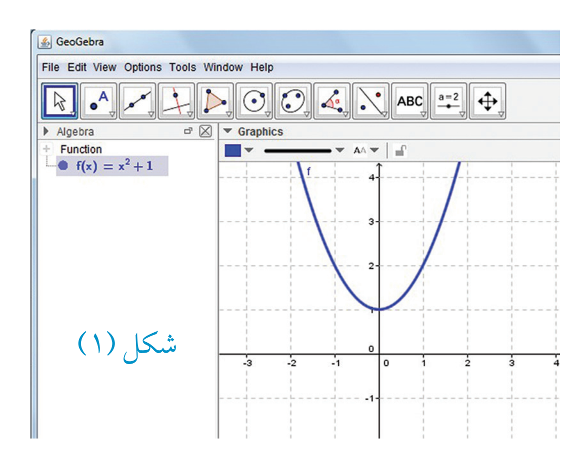
أولًا: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة *Vertical Translation*



اعمل مع زميل

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢}
باستخدام برنامج **Geogebra**

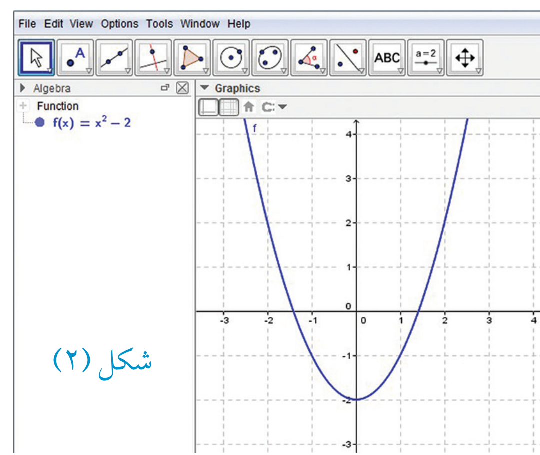
٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحبه رأسيًا لأعلى وحدة واحدة ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} + ١ كما فى شكل (١).



شكل (١)

٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٠، ٢)، (٠، ٣) وسجل ملاحظاتك فى كل مرة.

٤) اسحب منحنى د(س) = س^{٢} وحدتين رأسيًا إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} - ٢ كما فى شكل (٢)



شكل (٢)

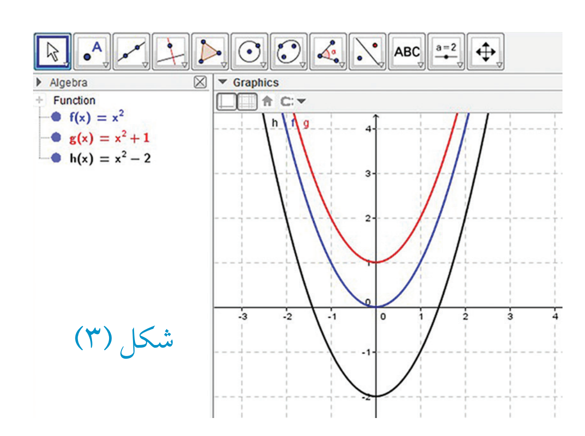
فكر: بين كيف يمكن رسم د(س) = س^{٢} - ٥ باستخدام منحنى د(س) = س^{٢}؟

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

د(س) = س^{٢} ، ر(س) = س^{٢} + ١ ، ق (س) = س^{٢} - ٢ فإن:

١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

٢) منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.



شكل (٣)

تفكير ناقد: باستخدام منحنى د(س) = س^{٣} بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:

أ) ر(س) = س^{٣} + ٤ ب) ق(س) = س^{٣} - ٥

تعلم

رسم المنحنى ص = د(س) + أ

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = د(س) + أ هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$ ، عندما أ > ٠ ، و فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$ عندما أ < ٠ .

مثال

٣ يبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر ، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية

اكتب قاعدة كل من ر ، ق حيث د(س) = |س|

الحل

∵ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه و ص⃖

∴ ر(س) = د(س) - ٣

∵ د(س) = |س| ∴ ر(س) = |س| - ٣

، ∵ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه و ص⃖

∴ ق(س) = د(س) + ٢

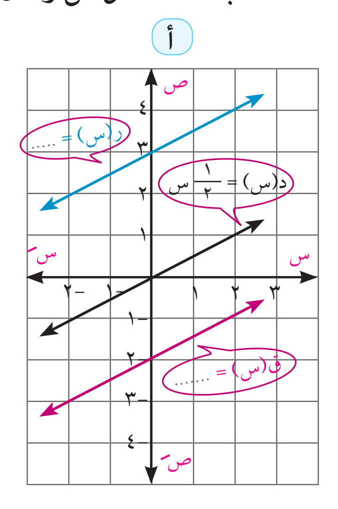
∵ د(س) = |س| ∴ ق (س) = |س| + ٢

حاول أن تحل

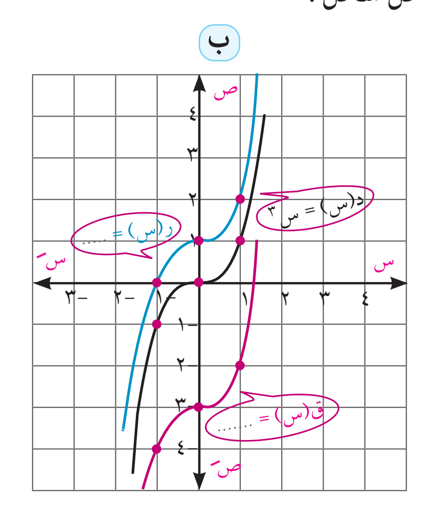
٤ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د ، ر ، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية،

اكتب قاعدة كل من ر ، ق فى كل شكل .

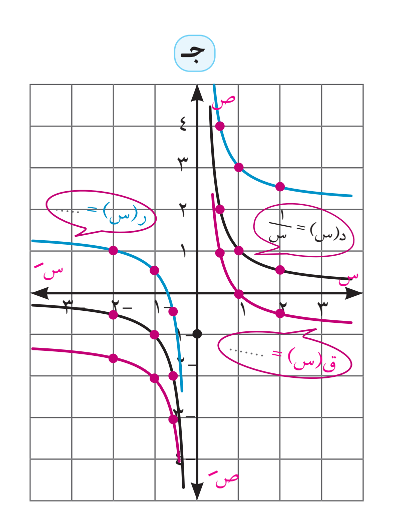
أ



ب



جـ

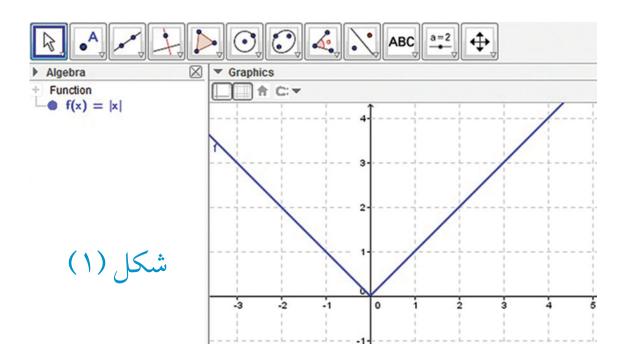


ثانيًا: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة *Horizontal Translation*

عمل تعاونى

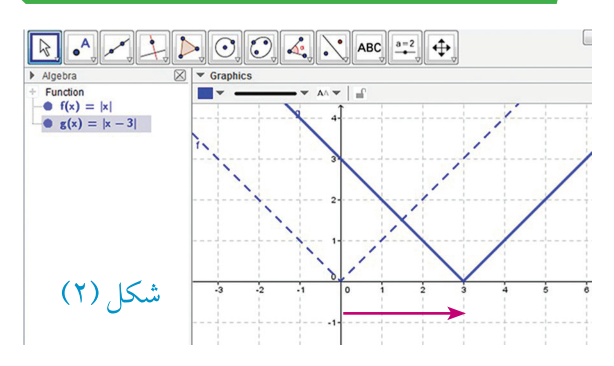
اعمل مع زميل:

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = |س| مستخدمًا برنامج *Geogebra* بكتابة قاعدة الدالة فى مربع الإدخال على النحو التالي: abs(x) ثم اضغط إدخال فيظهر منحنى الدالة فى النافذة البيانية وقاعدتها f(x)=|x| فى النافذة الجبرية كما فى شكل (١)



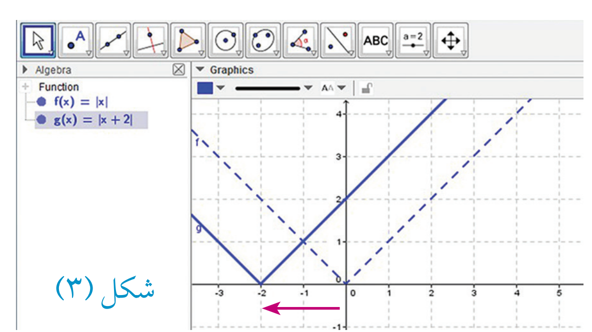
شكل (١)

٢) اسحب منحنى الدالة أفقيًّا فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بعدد من الوحدات ولاحظ تغير قاعدة الدالة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٢)



شكل (٢)

٣) اسحب منحنى الدالة أيضًا فى الاتجاه السالب لمحور السينات بعدد من الوحدات كما فى شكل (٣)، ماذا تلاحظ؟



شكل (٣)

فكر: بين كيف ترسم منحنيا الدالتين ر ، ق باستخدام منحنى الدالة د حيث: د(س) = |س|، ر(س) = |س - ٥| ، ق(س) = |س + ٤|.



تعلم

رسم المنحنى ص = د (س + أ)

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى، ص = د(س + أ) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ عندما يكون أ > ٠، وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{و سَ}}$ عندما يكون أ < ٠ .



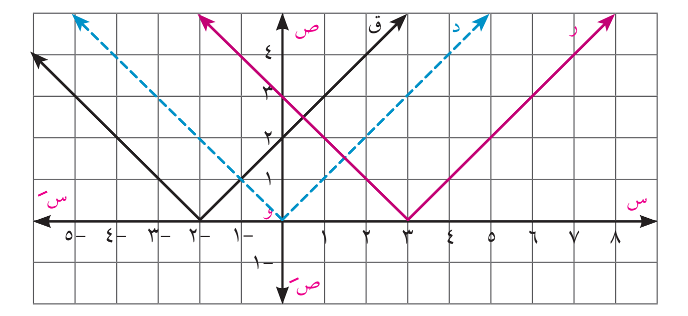
لاحظ: فى الشكل المقابل: د(س) = |س|:

١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

∴ ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٣، ٠)

٢) منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و سَ}}$

∴ ق(س) = |س + ٢| ، نقطة بدء الشعاعين (-٢ ، ٠)



مثال

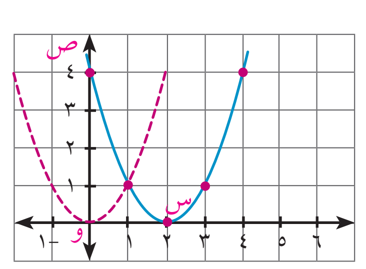
٤) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ) ر(س) = $(س - ٢)^{٢}$

ب) ع (س) = $(س + ٣)^{٢}$

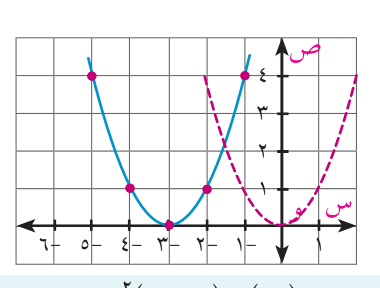
الحل

أ



منحنى ر (س) = (س - ٢)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٢،٠).

ب



منحنى ع (س) = (س + ٣)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة ٣ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور السينات، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (-٣ ، ٠).

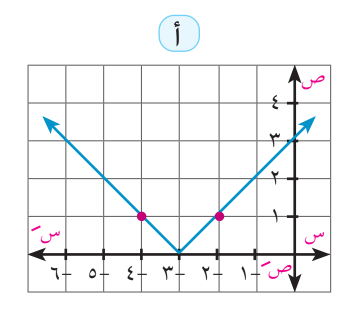
حاول أن تحل

٥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

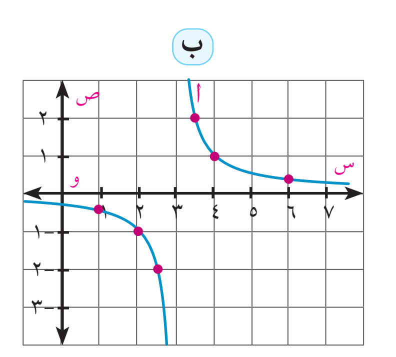
أ ر(س) = (س + ٤)^{٢} ب ع (س) = (س – ٣)^{٢}

٦ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًّا بالأشكال التالية:

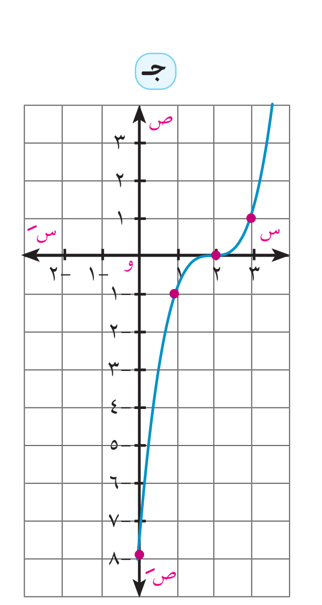
أ



ب



جـ



تفكير ناقد: إذا كان د(س) = س^{٢} ، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = (س - ٣)^{٢} + ٢

رسم المنحنى ص = د(س + أ) + ب

مما سبق نستنتج أن: المنحنى ص = د(س + أ) + ب هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها أ من الوحدات (في اتجاه و س← عندما أ > ٠ ، وفى اتجاه و س→ عندما أ < ٠) ، ثم إزاحة رأسية قدرها ب من الوحدات (في اتجاه و ص← عندما ب > ٠ ، وفي اتجاه و ص→ عندما ب < ٠)

حاول أن تحل

٧ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{2}$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ $ر(س) = (س + ٢)^{2} - ٤$ ب $ع(س) = (٣ - س)^{2} - ١$

مثال

٥ ارسم منحنى الدالة ر حيث $ر(س) = \frac{١}{س - ١} + ٣$ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها:

الحل

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$

بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ($أ = -١ < ٠$) ، ثم

إزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ وتكون نقطة تماثل

منحنى الدالة ر هى النقطة (١ ، ٣) ، مدى ر = ع - {٣}

اطراد الدالة ر:

ر تناقصية فى]-∞، ١[، وتناقصيه أيضًا فى]١ ، ∞[

تفكير ناقد: هل يمكن القول بأن $د(س) = \frac{١}{س - ٢} + ٣$ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.

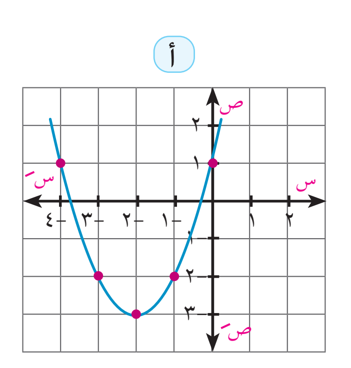
حاول أن تحل

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ ، لتمثيل كل من:

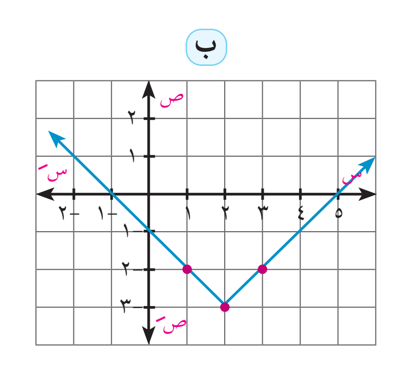
أ $ر(س) = \frac{١}{س + ٢} + ١$ ب $ق(س) = \frac{٢س - ٣}{س - ٢}$

٩ اكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية :

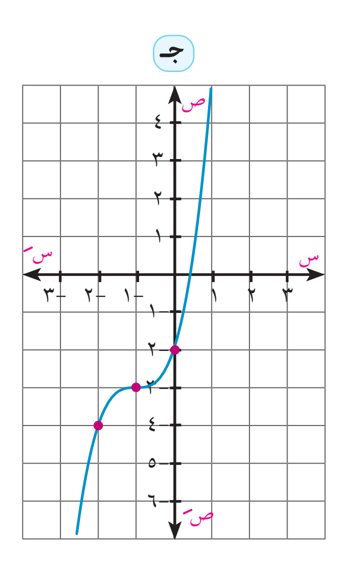
أ



ب

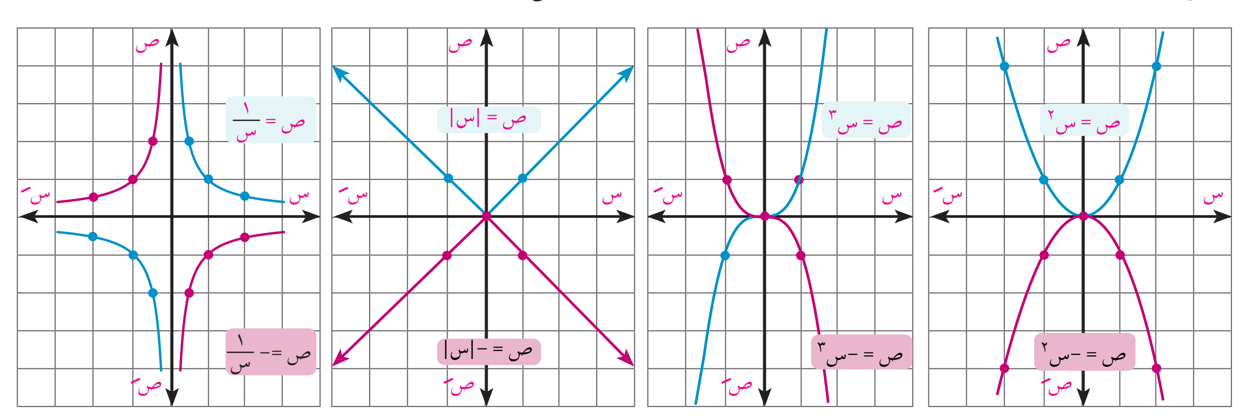


ج



ثالثًا : انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

تبين الأشكال التالية إنعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية فى محور السينات.



ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟

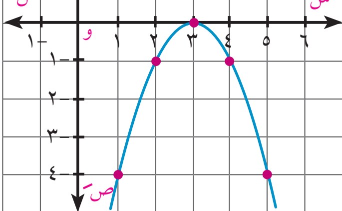


رسم المنحنى ص = - د(س)

لأى دالة د، يكون المنحنى ص = - د(س) هو نفس منحنى ص = د(س) بانعكاس فى محور السينات

مثال

استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

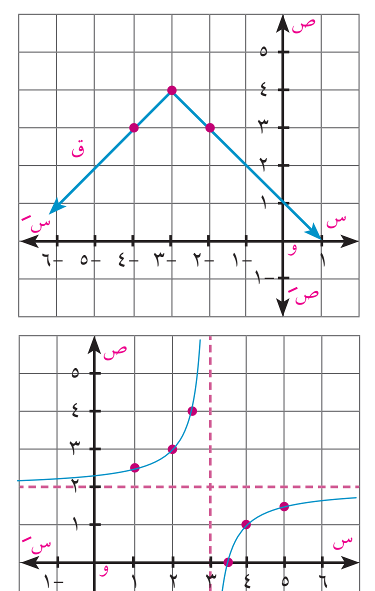


٦ باستخدام منحنيات الدوال الاساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ق، ع حيث:

أ ر(س) = -(س - ٣)^{2} ب ق (س) = ٤ - |س+٣|

ج ع (س) = ٢ - $\frac{١}{س-٣}$

الحل



أ منحنى ر(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = س^{2} فى محور السينات ، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.

ب منحنى ق(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = |س| فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}'}$ ، وإزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، وتكون نقطة بدء الشعاعين هى النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأسفل.

ج منحنى ع(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = $\frac{١}{س}$ فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، وتكون نقطة تماثل المنحنى هى (٣، ٢)

٩ حاول أن تحل

١٠ في كل ممايأتى ارسم منحنى الدالة ر حيث:

أ ر(س) = ٣ - (س +١)^{٢} ب ر(س) = - (س - ٣) ^{٣}

جـ ر(س) = ٣- |س - ٥|

ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحدالبرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.



مثال

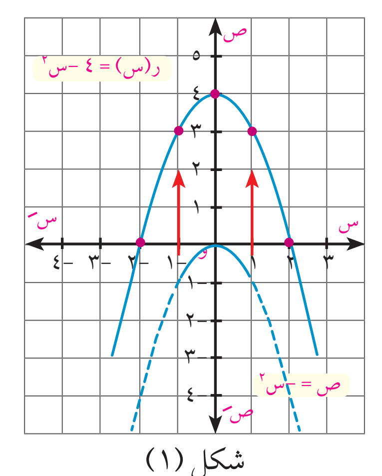
استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

٧ مستخدمًا التحويل المناسب ، ارسم منحنيى الدالتين ر ، ق حيث ر(س) = ٤ - س^{٢} ، ق(س) = |٤ - س^{٢}|

الحل

أولًا: رسم منحنى الدالة ر

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢} بانعكاس في محور السينات، ثم إزاحة رأسية مقدارها ٤ وحدات في اتجاه و ص ويوضحه شكل (١)



شكل (١)

ثانيًا: رسم منحنى الدالة ق

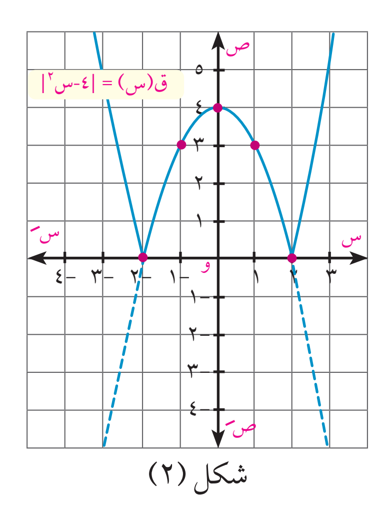
∵ ق (س) = | ٤ - س^{٢}| ∴ ق (س) = |ر(س)|

فيكون الإحداثى الصادى لجميع نقط منحنى الدالة ق موجبًا حيث:

ص = |ر(س)|

∴ ص = { ر(س) عندما ر(س) ≥ ٠ ، - ر(س) عندما ر (س) < ٠ }

أى أن منحنى الدالة ق يقع فى الربعين الأول والثانى فقط وهذا يعنى إنعكاسًا لمنحنى الدالة ر لكل ر(س) < ٠ فى محور السينات كما فى شكل (٢).

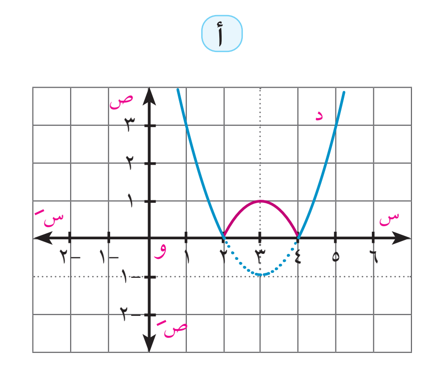


شكل (٢)

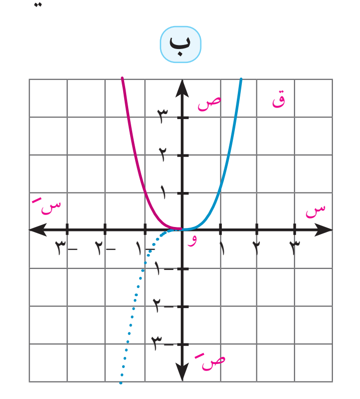
حاول أن تحل

(١١) تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ق، ر اكتب قاعدة الدالة في كل شكل:

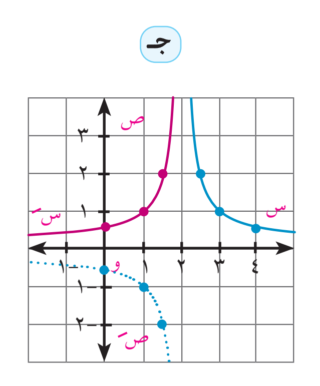
أ



ب



جـ



رابعًا: تمدد منحنى الدالة: *Expanding of graphs*

عمل تعاوني

رسم منحنى ر(س) = أ د (س)

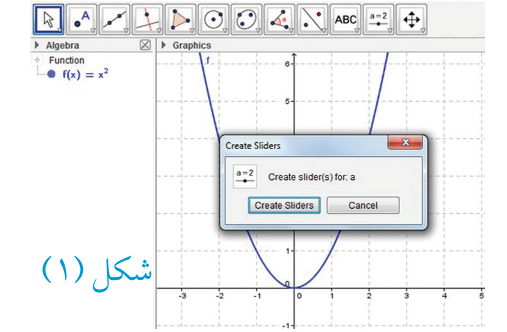
اعمل مع زميل.

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢} باستخدام برنامج *Geogebra* وفي مربع الإدخال اكتب قاعدة الدالة ر على النحو التالي:

إبدأ ← a ▶ x ^ 2 ↵

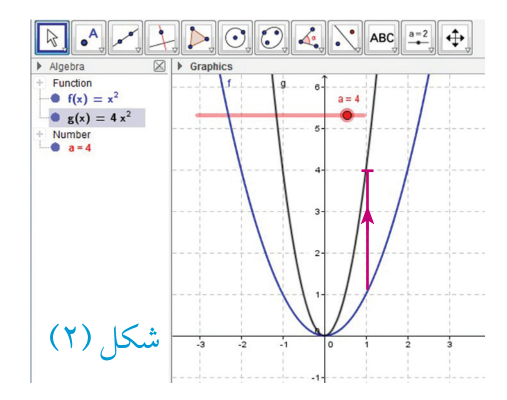
لتظهر لك نافذة جديدة (شكل ١)

إختر منها *Create sliders*



شكل (١)

٢) استخدم مؤشر قيم a لاختيار قيم أخرى لها حيث a>١ ولاحظ حركة منحنى الدالة ر بالنسبة لمنحنى الدالة د لكل س ∈ ع كما في شكل (٢) وعندما ١ > a كما في شكل (٣) ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟



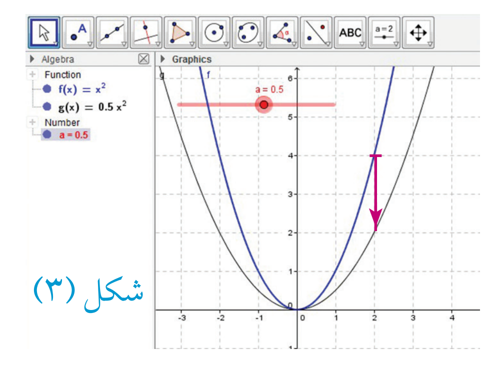
شكل (٢)

تعلم

رسم المنحنى ص = أ د (س)

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = أ د(س) هو تمدد رأسي لمنحنى ص = د(س) إذا كان أ > ١،

و إنكماش رأسي لمنحنى ص = د (س) إذا كان . > أ > ١



شكل (٣)

رسم منحنى الدالة ر: ر(س) = أ د (س + ب) + جـ

مثال

استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع:

أ ر(س) = ٢ |س| ب ع(س) = ٢|س - ٧| + ٢

الحل

أ

منحنى ر(س) هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د معاملة أ = ٢ > ٠ وعلى ذلك فإن:

لكل (س ، ص) ∈ بيان د

يكون (س، ٢ ص) ∈ بيان ر



منحنى ع(س) هو نفس منحنى ر(س) بإزاحة أفقية قدرها ٧ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

حاول أن تحل

١٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ لتمثيل الدالتين ر ، ع :

أ ر(س) = - $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ ب ع(س) = ٢ - $\frac{١}{٢}$ $(س - ٥)^٢$

تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية ثم حدد مدى الدالة ع وابحث اطرادها.

نشاط

تطبيق التحويلات الهندسية التى درستها فى الدوال الجبرية السابقة على دوال الجيب وجيب التمام؟

الدوال المثلثية (منحنى دالة الجيب) *Trigonometric functions*

أولًا: الإزاحة في اتجاه محور السينات *First: Translation on X - axis*

١) استخدم برنامج جيوجبرا (*GeoGebra*) وأعد البرنامج بحيث يكون التدريج على محور السينات بالراديان، وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين)، وتختار منها فى آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x، ثم تختار منه نظام التدريج (π).

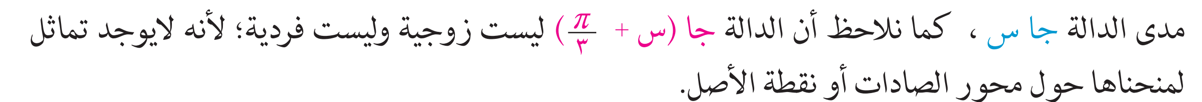
٢) فى أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: sin (x) ثم اضغط (enter) فتعطى لك شكل المنحنى الأحمر، تستطيع التحكم فى اللون وسمك المنحنى، وذلك بالضغط على المنحنى بالفأرة (كليك شمال)، فيظهر فى أعلى النافذة اللون وسمك الخط وشكل الخط ٠ منقط، شرطى، متصل ،....).

٣) بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر: $\sin(x + (\pi/3))$ أي: ص = جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ثم اضغط (enter) ولون هذا المنحنى بلون آخر.

٤) قارن بين المنحنيين. ماذا تلاحظ؟

من الرسم نستنتج أن:

تم إزاحة منحنى دالة الجيب أفقيًّا جهة اليسار على محور السينات بمقدار يساوي $\frac{\pi}{٣}$ (كما في الدوال الحقيقية)، ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [- ١ ، ١] وهو نفس



مدى الدالة جا س ، كما نلاحظ أن الدالة جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ليست زوجية وليست فردية؛ لأنه لايوجد تماثل لمنحناها حول محور الصادات أو نقطة الأصل.



فكر:

➤ ماذا تتوقع أن يكون اتجاه الإزاحة السينية إذا كانت قاعدة الدالة هي: جا (س - $\frac{\pi}{٣}$).

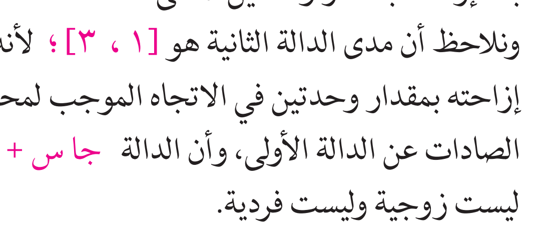
ثانيا: الإزاحة في اتجاه محور الصادات — *Second: Translation on Y -axis*

١) ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = جا س كما سبق.

٢) ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = جا س + ٢ بلون آخر وقارن بين شكل المنحنيين. ماذا تلاحظ؟

من الرسم نستنتج أن

منحنى الدالة الثانية هو نفسه منحنى الدالة جا س ، بعد إزاحته بمقدار وحدتين لأعلى.



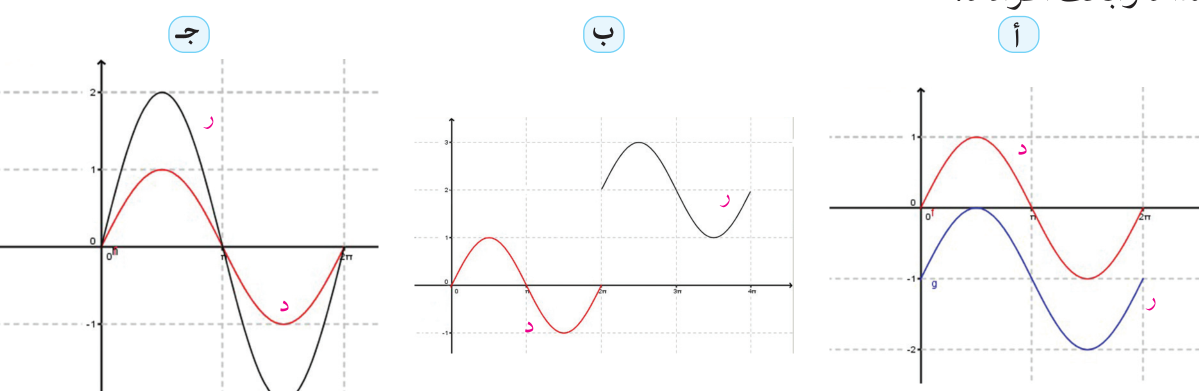
ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [١ ، ٣] ؛ لأنه تم إزاحته بمقدار وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور الصادات عن الدالة الأولى، وأن الدالة جا س + ٢ ليست زوجية وليست فردية.



تفكير ناقد:

في كل من الأشكال الآتية:

صف التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة د والتي ترسم منحنى الدالة ر، ثم اكتب قاعدة الدالة ر بدلالة د وحدد مداها وابحث اطرادها.



تمارين ١ – ٤

١) حدد قيم أ ، ب ، جـ التي تجعل د(س) = ر(س) حيث

د(س) = (أ + ب) $س^٣$ + ٣س - ٢ ، ر(س) = ٥$س^٣$ + (أ + جـ) س + ب

٢) ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها

أ) د(س) = { |س| عندما س ⩽ ٠ ، $س^٢$ عندما س > ٠ }

ب) د(س) = { ٤ عندما س < -٢ ، $س^٢$ عندما س ⩾ -٢ }

جـ) د(س) = { $س^٣$ عندما س < ١ ، ١ عندما س > ١ }

د) د(س) = { $\frac{١}{س}$ عندما س < ٠ ، |س| عندما س > ٠ }

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

٣) منحنى ر(س) = $س^٢$ + ٤ هو نفس منحنى د(س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه:

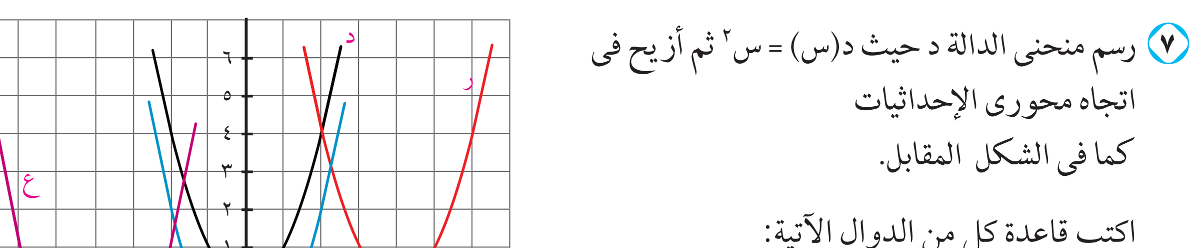
أ) $\overleftarrow{و س}$ ب) $\overleftarrow{و سَ}$ جـ) $\overleftarrow{و ص}$ د) $\overleftarrow{و صَ}$

٤) منحنى ر(س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د(س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه:

أ) $\overleftarrow{و س}$ ب) $\overleftarrow{و سَ}$ جـ) $\overleftarrow{و ص}$ د) $\overleftarrow{و صَ}$

٥) نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = $(٢ - س)^٢$ + ٣ هي:

أ) (٢، ٣) ب) (٢، -٣) جـ) (-٢، ٣) د) (-٢، -٣)

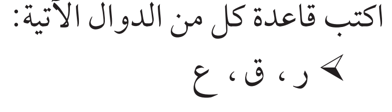


٦) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هي:

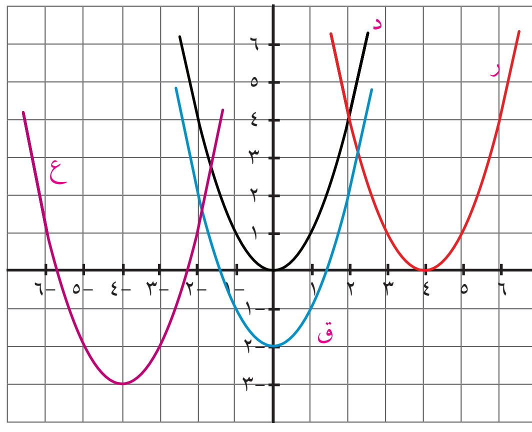
أ) (٣، -٤) ب) (-٣، -٤) جـ) (٣، ٤) د) (-٣، ٤)

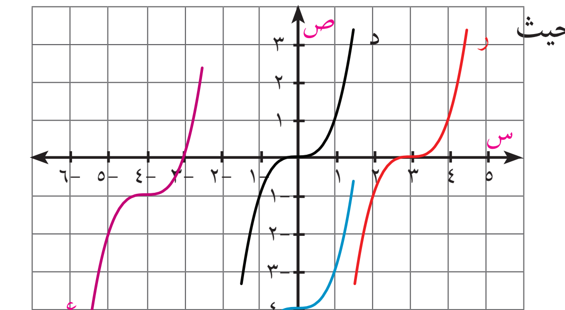
٧) رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات كما فى الشكل المقابل.

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:



ر ، ق ، ع



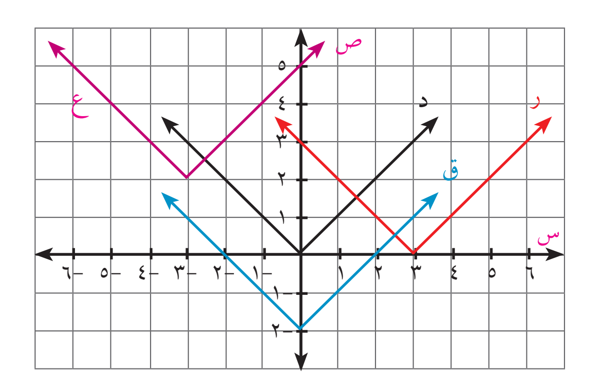


⮜ ⑧ فى الشكل المقابل: رسم منحنى الدالة د، حيث

د(س) = س^{٣} ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

⮜ ر ، ق ، ع



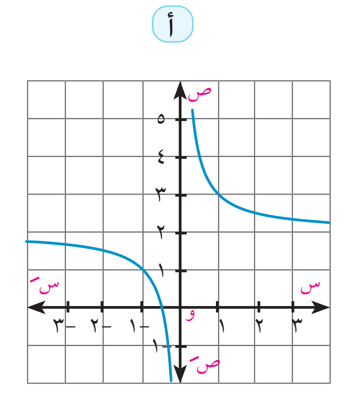
⑨ رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س|
ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات
كما فى الشكل المقابل.

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

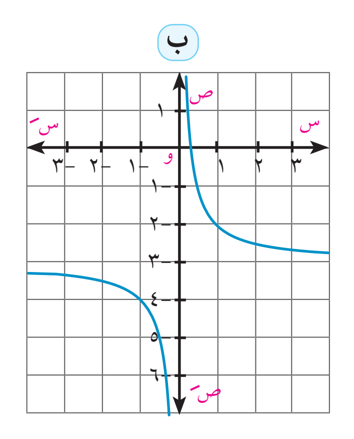
⮜ ر ، ق ، ع

⑩ رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$، ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات . اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:

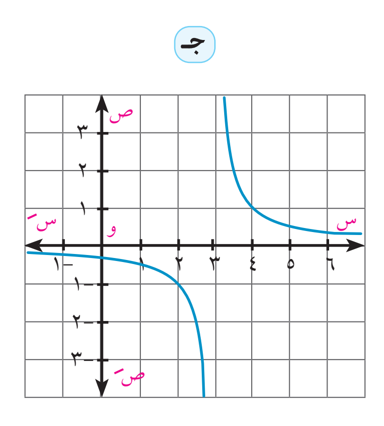
أ



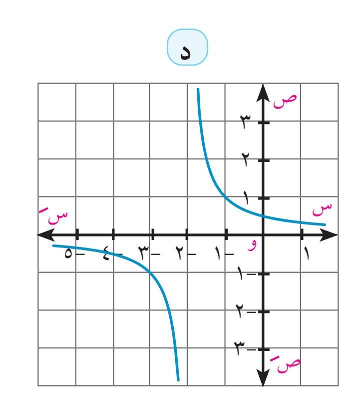
ب



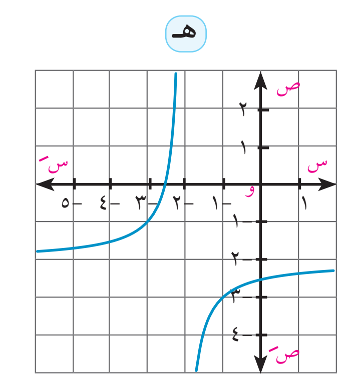
جـ



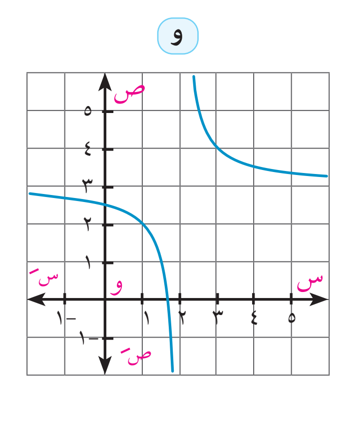
د



هـ



و



(١١) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ لتمثيل ما يأتي بيانيًّا.

أ $د_١(س) = س^٢ - ٤$ ب $د_٢(س) = س^٢ + ١$ جـ $د_٣(س) = (س + ١)^٢$

د $د_٤(س) = (س - ٣)^٢$ هـ $د_٥(س) = (س - ١)^٢ - ٢$ و $د_٦(س) = (س + \frac{٣}{٢})^٢ - \frac{١}{٢}$

(١٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بيانيًّا:

أ $د_١(س) = |س| + ١$ ب $د_٢(س) = |س| - ٣$ جـ $د_٣(س) = |س + ٢|$

د $د_٤(س) = |٥ - س|$ هـ $د_٥(س) = |س + ٢| + ١$ و $د_٦(س) = |س - ٣| - ٢$

◄ ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.

(١٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٣$. لتمثيل ما يأتي بيانيا:

أ $د_١(س) = د(س) - ٣$ ب $د_٢(س) = د(س) + ١$ جـ $د_٣(س) = د\ (س - ٢)$

د $د_٤(س) = د(س + ٣)$ هـ $د_٥(س) = د(س - ٢) - ١$ و $د_٦(س) = د(س + ٣) + ٢$

◄ ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

(١٤) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البياني للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

أ ق(س) = د(س + ١) ب ق(س) = د(س - ٣) جـ ق(س) = د(س) + ٢

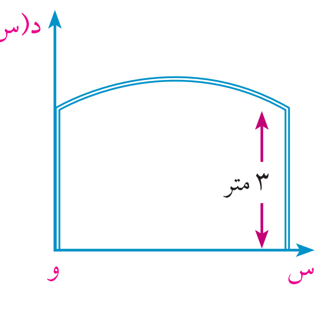
د ق(س) = د(س) - ٤ هـ ق(س) = د(س + ٢) - ٥ و ق(س) = د(س - ٢) + ٢

(١٥) ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرادها

أ $د_١(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س^٢ - ٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

ب $د_٢(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & \text{عندما } -٤ \leq س < ٠ \\ -س^٢ - ١ & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

جـ $د_٣(س) = س\ |س| - ١$ د $د_٤(س) = \frac{٢س}{س + ١}$



(١٦) ارسم منحنى الدالة د ، وحدد مداها إذا كان: د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٨س + ١٦}$

(١٧) الربط مع الصناعة: صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د: د(س) = أ $(س - ٢)^٢ + ٤$ كما فى الشكل المقابل. أوجد:

أ قيمة أ ب أقصى ارتفاع للبوابة

جـ عرض البوابة`



حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Absolute Value Equations and Inequalities

سوف تتعلم

- حل معادلات المقياس بيانيًّا
- حل معادلات المقياس جبريًّا
- حل متباينات المقياس بيانيًّا.
- حل متباينات المقياس جبريًّا
- نمذجة مشكلات وتطبيقات حياتية وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس

المصطلحات الأساسية

- معادلة. Equation
- متباينة. Inequality
- حل بياني. Graphical Solution

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة رسومية
- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب.

أولًا: حل المعادلات

فكر وناقش

مثل بيانيًّا في شكل واحد منحنيى الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة خطية.

لاحظ الرسم ثم اجب:

أ) ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنيى الدالتين معًا؟

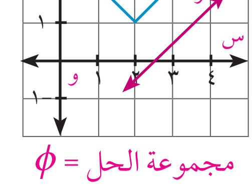
ب) إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنيين معًا، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين ؟

جـ) استخدم الحاسبة البيانية في التحقق من صحة إجابتك.

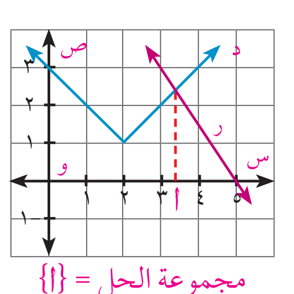
لاحظ أن:

١) عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: د(س) = ر(س) ، والعكس صحيح لكل س تنتمي إلى المجال المشترك للدالتين.

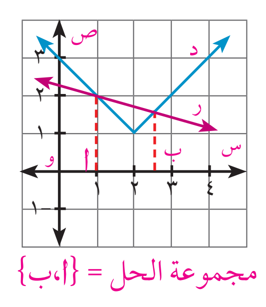
٢) لأى دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:



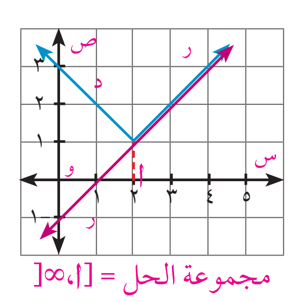
مجموعة الحل = ϕ



مجموعة الحل = {أ}



مجموعة الحل = {أ، ب}



مجموعة الحل = [أ، ∞[

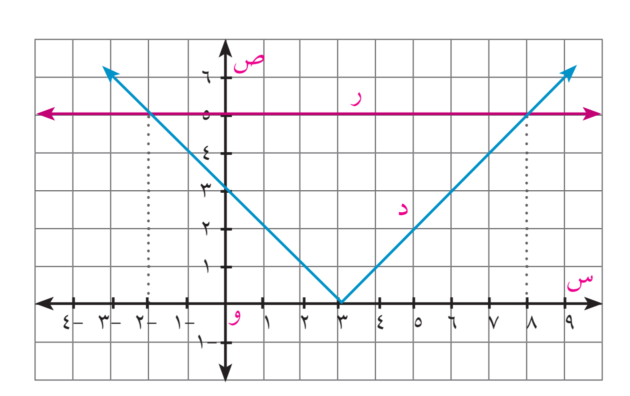
حل المعادلة: | أ س - ب | = جـ

مثال

١) حل المعادلة: |س - ٣| = ٥ بيانيًّا وجبريًّا.

الحل

بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ٥



١) نرسم منحنى الدالة د:د(س) = |س -٣| بإزاحة منحنى د(س) = |س| ثلاث وحدات في اتجاه و س

٢) على نفس الشكل نرسم ر(س)= ٥ ، حيث ر دالة ثابتة يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠، ٥)

∵ المنحنيين يتقاطعان في النقطتين (-٢، ٥) ، (٨، ٥)

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {-٢ ، ٨}

الحل الجبرى:

من تعريف دالة المقياس: د(س) = { س - ٣ عندما س ⩾ ٣ ، - س + ٣ عندما س < ٣

عندما س ⩾ ٣: س − ٣ = ٥ أى أن: س = ٨ ∈ [٣، ∞[

عندما س < ٣ : − س + ٣ = ٥ أى أن: س = -٢ ∈]- ∞ ، ٣[

مجموعة حل المعادلة هى: {− ٢ ، ٨} وهذا يطابق الحل البياني.

حاول أن تحل

١) حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

أ) |س| - ٤ = ٠ ب) |س| + ١ = ٠ ج) | س − ٧ | = ٥

بعض خواص مقياس العدد *Properties of the Absolute Value*

تعلم

١) |أ ب| = |أ| × |ب| فمثلاً:

|٢ × - ٣| = | - ٦| = ٦ ، |٢| × | - ٣| = ٢ × ٣ = ٦

٢) |أ + ب| ⩽ |أ| + |ب|

ويحدث التساوى فقط إذا كان العددان أ ، ب لهما نفس الإشاره فمثلًا:

|٤ + ٥| = |٤| + |٥| = ٩ ، | - ٤ - ٥| = | - ٤ | + | - ٥| = ٩

لاحظ:

١) إذا كان: |س| = أ فإن: س = أ أو س = -أ لكل أ ∈ ع+

٢) إذا كان: | أ | = |ب| فإن: أ = ب أو أ = − ب لكل أ ، ب ∈ ع

٣) |س|^{٢} = |س^{٢}| = س^{٢} **٤)** إذا كان |س| = س فإن س∈ [٠ ، ∞ [

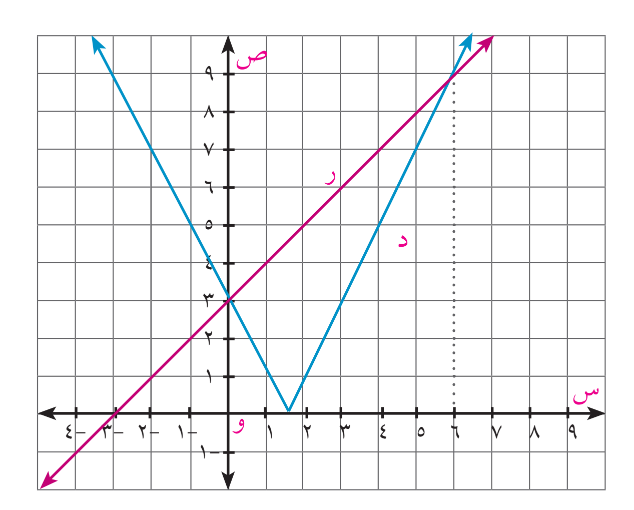
٥) إذا كان |س| = - س فإن س∈]- ∞ ، ٠]

حل المعادلة |أ س + ب| = جـ س + ى

مثال

٢ حل المعادلة: |٢س - ٣| = س + ٣ بيانيًّا وجبريا.





بوضع د(س) = |٢س -٣| ، ر(س) = س + ٣

الحل البيانى:

د: د(س) = |٢س - ٣| = |٢(س - $\frac{٣}{٢}$)|

د(س) = ٢ |س - $\frac{٣}{٢}$|

منحنى د هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية

قدرها $\frac{٣}{٢}$ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

ر: ر(س) = س + ٣ ويمثلها خط مستقيم ميله = ١ ويمر بالنقطة (٠، ٣)

∵ نقط التقاطع هى (٠ ، ٣) ، (٦، ٩)

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}

الحل الجبرى:

∵ |٢س - ٣| = { ٢ س - ٣ عندما س ≥ $\frac{٣}{٢}$ ، - ٢ س + ٣ عندما س < $\frac{٣}{٢}$ }

∴ عندما س ≥ $\frac{٣}{٢}$ تكون ٢س - ٣ = س + ٣ ومنها س = ٦ ∈ [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞ [

، عندما س < $\frac{٣}{٢}$ تكون - ٢س + ٣ = س + ٣ ومنها س = ٠ ∈] - ∞ ، $\frac{٣}{٢}$ [

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}

حاول أن تحل

٢ حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

أ |٢س + ٤| = ١ - س   ب |٢س + ٥| = س - ٤   جـ |س - ٣| = ٣ - س

حل المعادلة : |أ س + ب| = |جـ س + ى|

مثال

٣ حل المعادلة |س - ٣| = |٢س + ١| بيانيًّا.

الحل

بوضع د(س) = |س -٣| ، ر(س) = |٢ س +١|

منحنى د: هو نفس منحنى |س| بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه و س

ر: ر(س) = ٢ |س + $\frac{1}{2}$|

منحنى ر هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية قدرها $\frac{1}{2}$ وحدة في اتجاه و سَ ، ويكون نقط تقاطع منحنيا الدالتين د ، ر هى: (-٤، ٧) ، ($\frac{1}{2}$، $\frac{5}{2}$)

مجموعة حل المعادلة هى {-٤، $\frac{1}{2}$ }

حاول أن تحل

٣ حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا.

أ |س + ٧| = |٢س + ٣|

ب | س – ٢| + | س - ١| = صفر

مثال

٤ أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ |س + ٧| = |س – ٥|

ب $\sqrt{س^2 + ٦س + ٩}$ = ٩ – ٢س

الحل

أ ∵ |س + ٧| = |س – ٥|

∴ س + ٧ = س – ٥

أو س + ٧ = - س + ٥

∴ س = - ١

∴ س + ٧ = ± (س – ٥)

∴ ٧ = - ٥ (غير ممكن).

أى أن: ٢س = - ٢

أى أن مجموعة حل المعادلة هى {-١}

تذكر أن

إذا كان أ، ب ∈ ع

وكان |أ| = |ب|

فإن: أ = ± ب

التحقيق:

بالتعويض عن س = - ١ فى طرفى المعادلة نجد أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٦ أى أن مجموعة الحل هى {- ١}

فكر:

حل المعادلة السابقة بتربيع طرفيها، ثم تحقق من صحة الحل.

ب ∵ $\sqrt{س^2 - ٦س + ٩}$ = ٩ – ٢س

∴ $\sqrt{(س - ٣)^2}$ = ٩ – ٢س أى أن: ∴ |س - ٣| = ٩ – ٢س

أولا: عندما س ⩾ ٣ فإن: س – ٣ = ٩ – ٢س

∴ ٣س = ١٢ أى أن: س = ٤ ∈ [٣ ، ∞ [

ثانيا: عندما س < ٣ فإن: س – ٣ = - ٩ + ٢س

∴ س = ٦ أى أن: س = ٦ ∌] - ∞ ، ٣ [

∴ مجموعة الحل هى {٤}

تذكر أن

لأي عدد حقيقى أ يكون:

$\sqrt{أ^2}$ = |أ|

فكر:

١) هل يمكنك استخدام طرق جبرية أخرى لإيجاد حلٍّ للمعادلة ؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

٤ أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ $|$س - ١$|$ - ٢ $|$٢ - س$|$ = ٠

ب $\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}$ = ٤

تطبيقات حياتية على حل المعادلات

مثال — تخطيط المدن

٥ قطعة أرض محصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث:

د(س) = $|$س-٣$|$ -٢ ، ر(س)=٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار إحسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

الحل

بتمثيل منحيي الدالتين د ، ر بيانيا نجد انهما يتقاطعان في النقط أ (-٢،٣) ، ب (٨،٣) ، و تكون قطعة الأرض على شكل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية جـ حيث

أ ب = ٨-(-٢)=١٠وحدات

جـ ء = ٣-(-٢)=٥ وحدات

مساحة △ ب أ جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × جـ ء

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٥ = ٢٥ وحدة مربعة

مساحة قطعة الأرض = ٢٥ (٨ × ٨) = ١٦٠٠ متراً مربعًا.



حاول أن تحل

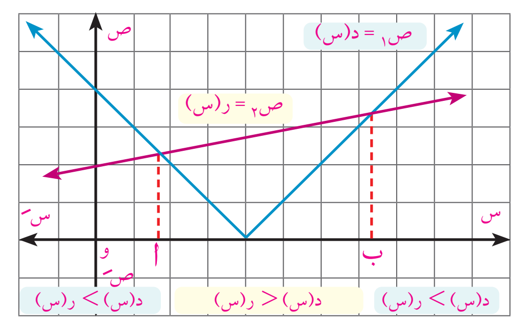
٥ أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث:

د(س) = $|$س-٢$|$ -١ ، ر(س)=٥-$|$س-٢$|$

ثانيا: حل المتباينات *Solving the Inequalities*

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هى عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: (< ، > ، ≥ ، ≤) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التى تجعل المتباينة صحيحة.

حل المتباينات بيانيًّا



يبين الشكل المقابل منحنى كل من الدالتين د، ر حيث:

ص$_١$ = د(س) ، ص$_٢$ = ر(س) وتكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى { أ ، ب}

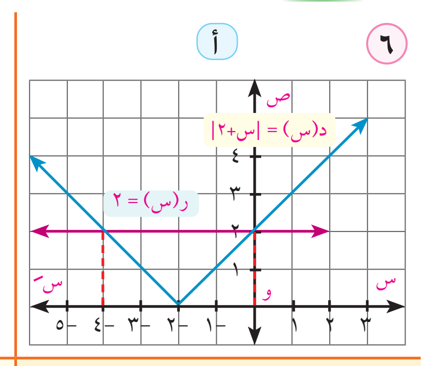
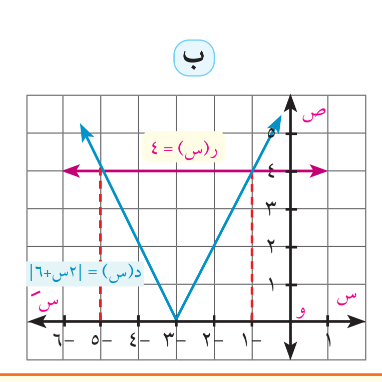
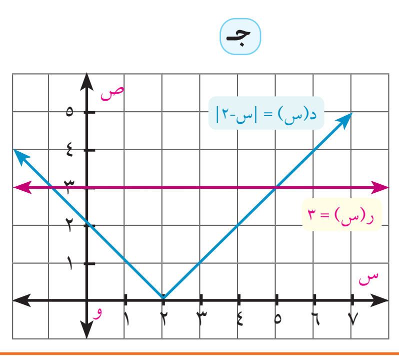
أى أن: $ص_1 = ص_2$ عندما س = أ أو س = ب

ويلاحظ: $ص_1 > ص_2$ أى د(س) > ر(س) عندما س ∈] أ ، ب[

$ص_1 < ص_2$ أى د(س) < ر(س) عندما س ∈] - ∞ ، أ[∪]ب ، ∞[

مثال

٦

أ	ب	جـ
		
مجموعة حل المتباينه $\|س+٢\| < ٢$ هى:] -٤ ، ٠[	مجموعة حل المتباينه $\|٢س + ٦\| \geqslant ٤$ هى:]-∞، -٥] ∪ [-١ ، ∞[أى أن: ع –]-٥، -١[	مجموعة حل المتباينه $\|س - ٢\| \leqslant ٣$ هى: [-١، ٥]

حاول أن تحل

٦ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعينًا بالأشكال البيانية في مثال (٧):

أ $|س + ٢| \leqslant ٢$ ب $|٢س + ٦| \leqslant ٤$ جـ $|س - ٢| > ٣$

حل المتباينات جبريًا

تعلم

أولاً: إذا كان | س | ≤ أ ، أ > ٠ فإن: -أ ≤ س ≤ أ

ثانيًا: إذا كان | س | ≥ أ ، أ > ٠ فإن: س ≥ أ أو س ≤ -أ

تذكر أن

لكل من أ ، ب ، جـ

إذا كان: أ < ب ، ب < جـ فإن أ < جـ

إذا كان: أ < ب فإن أ + جـ < ب + جـ

أ جـ < ب جـ عند جـ > ٠

أ جـ > ب جـ عند جـ < ٠

إذا كان أ ، ب موجبتان ، أ < ب فإن $\frac{١}{أ} > \frac{١}{ب}$

مثال

٧ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ $|س - ٣| < ٤$ ب $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١} \geqslant ٤$

جـ $\frac{١}{|٢س - ٣|} \geqslant ٢$

الحل

أ ∵ |س - ٣| < ٤ أى -٤ < س - ٣ < ٤ وبإضافة ٣ إلى المتباينة

∴ -٤ + ٣ < س - ٣ + ٣ < ٤ + ٣ أى أن: -١ < س < ٧

∴ مجموعة الحل =] -١ ، ٧[

ب ∵ $\sqrt{(س - ١)^٢}$ = |س - ١| أى أن: |س - ١| ⩾ ٤

∴ س - ١ ⩾ ٤   أى   س ⩾ ٥   أ،   س - ١ ⩽ - ٤   أى   س ⩽ - ٣

س ∈ ع -] - ٣ ، ٥[∴ مجموعة حل المتباينة هى] - ∞ ، - ٣] ∪ [٥ ، ∞[

ج ∵ $\frac{١}{|٢س - ٣|}$ ⩾ ٢   وبأخذ المعكوس الضربى للطرفين   ∴ |٢س - ٣| ⩽ $\frac{١}{٢}$ ،   س ≠ $\frac{٣}{٢}$

∴ - $\frac{١}{٢}$ ⩽ ٢س - ٣ ⩽ $\frac{١}{٢}$ وبإضافة ٣ إلى المتباينة   ∴ - $\frac{١}{٢}$ + ٣ ⩽ ٢س - ٣ + ٣ ⩽ $\frac{١}{٢}$ + ٣

∴ $\frac{٥}{٢}$ ⩽ ٢س ⩽ $\frac{٧}{٢}$ وبالقسمة على ٢   ∴ $\frac{٥}{٤}$ ⩽ س ⩽ $\frac{٧}{٤}$

∴ مجموعة حل المتباينة هى [$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$] - { $\frac{٣}{٢}$ }

حاول أن تحل

٧ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س - ٧| > ١١   ب |٣س + ٧| ⩽ ٨   ج $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}$ ⩾ ٨   د $\frac{١}{|٣س|}$ ⩾ ٥

تفكير ناقد: اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كل مما يأتى:

أ - ٤ ⩽ س ⩽ ٤   ب ٠ < س < ٦

ج س ⩽ - ٢ أو س ⩾ ٢   د ع - [-٢ ، ٦]



تمــاريـن ١ – ٥



أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

١) $|س - ٢| = ٣$

٢) $|٣ - ٢س| = ٧$

٣) $|س + ٢| = ٣س - ١٠$

٤) $|س + ٢| + س - ٢ = ٠$

٥) $س + |س| = ٢$

٦) $|س - ٢| = ٣س - ٤$

٧) $|س - ١| = س - ٢$

٨) $|٢س - ٦| = |س - ٣|$

٩) $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} + ٢س = ٩$

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

١٠) $|س - ٣| = ٧$

١١) $|س + ٢| + س - ٢ = ٠$

١٢) $|س - ٢| = ٣س - ٤$

١٣) $|٢س - ٤| = |س + ١|$

١٤) $|س| + س = ٠$

١٥) $|س + ٢| = |س - ٣|$

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًا:

١٦) $|س - ١| < ٢$

١٧) $|س - ٢| < ٣$

١٨) $|٥ - س| > ٣$

١٩) $|٢س - ٣| \geq ٧$

٢٠) $|س + ٣| > -١$

٢١) $|٢س - ٥| \geq ٢$

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية جبريًا:

٢٢) $|س - ٣| \leq ١٥$

٢٣) $|٣س - ٢| < ٤$

٢٤) $|٣س - ٧| \geq ٢$

٢٥) $|٣س + ٢| + ٥ < ٤$

٢٦) $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١} \geq ٤$

٢٧) $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩} \leq ٩$

٢٨) $|٢س - ٣| + |٦ - ٤س| < ١٢$

٢٩) $\frac{١}{|٢س - ٥|} \geq ٣$

٣٠) $\frac{١}{|٢س - ٣|} > ٢$

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

أُدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات فى أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر ، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية، كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية ($\text{لو}_{أ}(\text{س ص}) = \text{لو}_{أ}\text{س} + \text{لو}_{أ}\text{ص}$)، ويرجع الفضل للعالم ليونهارت أويلر فى القرن الثامن عشر، بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم الدالة الأسية ليتوسع مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالدوال.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمى فى مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت، ونسبة الڤولت، كما يستخدم الأس الهيدروجينى (وهو مقياس لوغاريتمى) فى الكيمياء لتحديد حمضية محلولٍ ما.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الدالة الأسية د: س $\longrightarrow$ $أ^{\text{س}}$ حيث $أ \in ح^{+} - \{1\}$.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يحل معادلات أسية على الصورة $أ^{\text{س}} = ب$.
- يحل تطبيقات باستخدام معادلات على الصورة $أ^{\text{س}} = ب$.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية $\text{ص} = \text{لو}_{أ}\text{س}$ أو $\text{د(س)} = \text{لو}_{أ}\text{س}$ حيث $أ \in ح^{+} - \{1\}$، $\text{س} \in ح^{+}$.
- يحول جبريًّا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- يتعرف الدالة العكسية وشرط وجودها.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم ص = س ومثال ذلك التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية في فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغازريتمية بيانيًّا.
- يتعرف قوانين اللوغاريتمات:
  - $\text{لو}_{أ}(\text{س ص}) = \text{لو}_{أ}\text{س} + \text{لو}_{أ}\text{ص}$ حيث $\text{س} > 0$، $\text{ص} > 0$
  - $\text{لو}_{أ}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{أ}\text{س} - \text{لو}_{أ}\text{ص}$ ، $\text{س} > 0$، $\text{ص} > 0$
  - $\text{لو}_{أ}\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{أ}\text{س}$ ، $\text{س} > 0$، $أ \in ح^{+} - \{1\}$، $\text{ن} \in ح$
  - $\text{لو}_{أ}\frac{1}{\text{س}} = -\text{لو}_{أ}\text{س}$ ، $\text{س} > 0$، $أ \in ح^{+} - \{1\}$
  - $\text{لو}_{أ}\text{س} = \frac{\text{لو}_{ب}\text{س}}{\text{لو}_{ب}أ}$ ، $\text{س} > 0$، $أ$، $ب \in ح^{+} - \{1\}$
  - $\text{لو}_{أ}ب = \frac{1}{\text{لو}_{ب}أ}$ ، $أ$، $ب \in ح^{+} - \{1\}$
  - $\text{لو}_{أ}أ = 1$ ، $أ \in ح^{+} - \{1\}$
  - $\text{لو}_{أ}1 = \text{صفر}$ ، $أ \in ح^{+} - \{1\}$
  - يحل معادلات لوغاريتمية
  - يحل مسائل تشتمل تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
  - يوجد قيمة اللوغاريتم باستخدام الآلة الحاسبة .
  - يستخدم الآلة الحاسبة فى حل بعض المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

أس	Exponent	نمو أسي	Exponential Growth	تماثل	Symmetry
قوة	Power	تضاؤل أسي	Exponential Decay	فائدة مركبة	Compound Interest
أساس	Base	زوجي	Even	دالة عكسية	Inverse Function
جذور	Radicals	فردي	Odd	لوغاريتم	Logarithm
أسس كسرية	Rational Exponents	قوانين الأسس	Laws of Exponents	صورة أسية	Exponential Form
الجذر التربيعي	Square Root	الدالة الأسية	Exponential Function	صورة لوغاريتمية	Logarithmic Form
الجذر التكعيبي	Cube Root	معادلة أسية	Exponential Equation	لوغاريتم معتاد	Common Logartithm
الجذر النوني	n^{th} Root	الدالة المتزايدة	Increasing Function	دالة لوغاريتمية	Logarithmic Function
جذر حقيقي	Real Root	الدالة المتناقصة	Decreasing Function	معادلة لوغاريتمية	Logarithmic Equation

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): الأسس الكسرية.

الدرس (٢ - ٢): الدالة الأسية وتطبيقاتها.

الدرس (٢ - ٣): المعادلات الأسية .

الدرس (٢ - ٤): الدالة العكسية.

الدرس (٢ - ٥): الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني.

الدرس (٢ - ٦): بعض خواص اللوغاريتمات.

مخطط تنظيمي للوحدة

- الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها
  - الأسس الكسرية
    - الجذر النونى
    - تعميم قوانين الأسس
  - الدالة الاسية
    - تعريف الدالة الاسية
    - التمثيل البيانى للدالة الاسية
  - المعادلة الاسية
  - الدالة العكسية
    - شرط وجود دالة عكسية
    - ايجاد الدالة العكسية جبريًا وبيانيًا
  - الدالة اللوغاريتمية
    - التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية
    - تطبيقات على الدالة اللوغاريتمية
  - خواص اللوغاريتمات
    - بعض خواص اللوغاريتميات
    - حل المعادلات اللوغاريتمية

الأدوات والوسائل

ورق رسم بيانى - آلة حاسبة علمية - حاسب آلى - برامج رسومية.



٢ - ١ الأسس الكسرية

Rational Exponents

سوف تتعلم

- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النونى.
- قوانين الأسس الكسرية.

المصطلحات الأساسية

- القوة النونية *The n^{th} Power*
- الأساس *Base*
- الأس *Exponent*
- جذر نونى *n^{th} Root*
- أس كسرى *Rational Exponent*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والجذور التكعيبية ، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها وسوف نتعرف فى هذا الدرس على الأسس الكسرية.

الجذر النونى:

تعلمت أن:

المعادلة $س^٢ = ٩$ لها جذران حقيقيان فقط هما $\sqrt{٩} = ٣$ أو $-\sqrt{٩} = -٣$

لاحظ أن $٣^٢ = ٩$ ، $(-٣)^٢ = ٩$

كذلك المعادلة $س^٣ = ٨$ لها جذر حقيقي وحيد

هو $\sqrt[٣]{٨} = ٢$ (باقي جذور المعادلة أعداد مركبة غير حقيقية)

لاحظ أن $(٢)^٣ = ٨$

وعلى وجه العموم:

المعادلة $س^ن = أ$ حيث $أ \in ع$ ، $ن \in ص^+$ **لها** ن من الجذور، وناقش فيما يلى عدة حالات:

لاحظ أن

لأى عدد حقيقى يكون

$\sqrt{أ^٢} = |أ|$

١) إذا كان ن عددًا زوجيًّا ، أ > ٠

فإن المعادلة $س^ن = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$ ، ويسمى الجذر النونى الذي له نفس إشارة أ بالجذر النونى الأساسى للعدد أ.

مثل: المعادلة $س^٤ = ١٦$ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[٤]{١٦} = ٢$ ، $-\sqrt[٤]{١٦} = -٢$ **(وباقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية).**

لاحظ أن $(٢)^٤ = ١٦$ ، $(-٢)^٤ = ١٦$

٢) إذا كان ن عددًا زوجيًّا ، أ < ٠

فإن المعادلة $س^ن = أ$ ليس لها جذور حقيقية **(جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).**

مثل: المعادلة $س^٢ = -٩$ ليس لها جذور حقيقية **(جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).**

٣) إذا كان ن عددًا فرديًّا ، أ $\in$ ع - {٠}

فإن المعادلة $س^ن = أ$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ (باقى **الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)**

مثل: المعادلة $س^{٥} = -٣٢$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ **(لاحظ أن $(-٢)^{٥} = -٣٢$)**

٤) إذا كان $ن \in ص^{+}$ ، $أ = صفر$

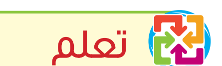
فإن المعادلة $س^{ن} = صفر$ لها حل حقيقي وحيد هو $س = ٠$ **(المعادلة لها ن من الجذور المكررة وكل منها يساوي صفر عندما $ن > ١$).**

حاول أن تحل

١) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $س^{٤} = ٨١$ ب) $س^{٥} = ٢٤٣$ ج) $س^{٤} = -١٦$ د) $س^{٣} = -٦٤$

تفكير ناقد: وضح بمثال عددي الفرق بين الجذر السادس للعدد أ وبين $\sqrt[٦]{أ}$



تعلم

الأسس الكسرية *Rational Exponents*

تعلمت أن الجذر التربيعي للعدد الحقيقي غير السالب أ هو العدد الذي مربعه يساوي أ وبفرض $أ^{م}$ تمثل الجذر التربيعي الأساسي للعدد أ

$\therefore (أ^{م})^{٢} = أ$ $\therefore أ^{٢م} = أ$ ومنها $٢م = ١$ $\therefore م = \frac{١}{٢}$

أي أن $أ^{\frac{١}{٢}}$ هي الجذر التربيعي الأساسي للعدد أ   أي أن $\sqrt{أ} = أ^{\frac{١}{٢}}$

بالمثل $أ^{\frac{١}{٣}}$ هي الجذر التكعيبي الأساسي للعدد أ   أي أن $\sqrt[٣]{أ} = أ^{\frac{١}{٣}}$ وعمومًا $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$

تعريف

١) لأي عدد حقيقي $أ \geqslant ٠$، $ن \in ص^{+} - \{١\}$ يكون $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما $أ < ٠$ ، ن عدد صحيح فردي أكبر من ١

٢) $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$ حيث $أ \in ع$، م، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك، $ن > ١$، $\sqrt[ن]{أ} \in ع$

تعميم قوانين الأسس

قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

مثال

١) أوجد قيمة كل مما يأتي (إن أمكن)

أ) $(١٦)^{\frac{١}{٤}}$ ب) $-(٢٧)^{\frac{١}{٣}}$ ج) $(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}}$

د) $(-٩)^{\frac{١}{٢}}$ هـ) $١٦^{\frac{٣}{٢}}$ و) $(٢٧)^{\frac{٤}{٣}}$

الحل

أ $(١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$

ب $-(٢٧)^{\frac{١}{٣}} = -\sqrt[٣]{٢٧} = -٣$

جـ $(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٢٤٣} = -٣$

د $(-٩)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٩} \notin ع$ [**لاحظ أن** $\sqrt{-٩} = ٣\,ت$]

هـ $١٦^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{١٦})^{٣} = ٤^{٣} = ٦٤$

و $(٢٧)^{\frac{-٤}{٣}} = \frac{١}{٢٧^{\frac{٤}{٣}}} = \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{٢٧}}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = \frac{١}{٨١}$

حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة كل مما يأتى (إن امكن):

أ $(١٢٥)^{\frac{١}{٣}}$ ب $(-٨١)^{\frac{٣}{٤}}$ جـ $(١٢٨)^{\frac{-٢}{٧}}$ د $-(٣٤٣)^{\frac{٢}{٣}}$

فسر لماذا؟

العدد $(-٨)^{\frac{١}{٣}}$ معرف فى ع $\sqrt[٣]{-٨} = -٢ \in ع$ ، **بينما العدد** $(\sqrt[٦]{-٨})^{٢}$ غير معرف فى ع

خواص الجذور النونية *Properties of n^{th} Roots*

١) $\sqrt[ن]{أ\,ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ ، $ب \neq ٠$ **حيث كل من** $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ع$

لاحظ أن

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ إذا كان ن زوجي

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$ إذا كان ن فردى

مثال

٢ أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ $-\sqrt[٣]{٨\,أ^{٦}\,ب^{٩}}$ ب $\sqrt[٤]{١٦\,س^{٤}\,ص^{٨}}$

الحل

أ $-\sqrt[٣]{٨\,أ^{٦}\,ب^{٩}} = -\sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{أ^{٦}} \times \sqrt[٣]{ب^{٩}} = -٢\,أ^{٢}\,ب^{٣}$

ب $\sqrt[٤]{١٦\,س^{٤}\,ص^{٨}} = \sqrt[٤]{١٦} \times \sqrt[٤]{س^{٤}} \times \sqrt[٤]{ص^{٨}} = ٢\,|س|\,ص^{٢}$

حاول أن تحل

٣ أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ $\sqrt[٤]{١٦\,أ^{١٢}}$ ب $\sqrt[٦]{(س + ٢ص)^{١٨}}$

مثال

٣ أوجد فى أبسط صورة كل من

أ $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$ ب $\frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times (١٤٧)^{\frac{١}{٦}}}{(٦٣)^{\frac{١}{٣}}}$

الحل

(أ) المقدار $= (2 \times 3^2)^{-\frac{1}{2}} \times (3 \times 2^2)^{\frac{3}{2}} \times (3 \times 2^3)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{2\times 3}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}}$

$= 2^{\frac{-1+6-3}{2}} \times 3^{\frac{-2+3-1}{2}} = 2^{\frac{2}{2}} \times 3^{0} = 2 \times 1 = 2$

(ب) المقدار $= \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \times (3 \times 7^2)^{\frac{1}{6}}}{(3^2 \times 7)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}}}$

$= 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 3^{0} \times 7^{0} = 1 \times 1 = 1$

حاول أن تحل

(٤) أثبت أن:

(أ) $\dfrac{(343)^{2\text{س} - \frac{1}{3}} \times (4)^{3\text{س} + 1}}{(196)^{3\text{س}} \times 4} = \dfrac{1}{7}$

(ب) $\dfrac{125 \times \sqrt[8]{4^3} \times 10^{-\frac{1}{4}}}{4^{\frac{5}{8}} \times \sqrt[4]{6^{-3}} \times 15^{\frac{3}{4}}} = 25$

حل المعادلات الآسية في ع

مثال

(٤) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $\text{س}^{\frac{7}{2}} = 128$

(ب) $(2\text{س} + 3)^{\frac{4}{3}} = 81$

(ج) $\text{س}^{\frac{4}{3}} - 13\,\text{س}^{\frac{2}{3}} + 36 = 0$

(د) $\sqrt[3]{\text{س}^5} - 31\sqrt[6]{\text{س}^5} = 32$

الحل

(أ) $\text{س}^{\frac{7}{2}} = 128$

$\text{س} = (128)^{\frac{2}{7}}$ $\text{س} = (2^7)^{\frac{2}{7}}$

$\text{س} = 2^2 = 4$ $\therefore$ م.ح $= \{4\}$

(ب) $(2\text{س} + 3)^{\frac{4}{3}} = 81$

$\left((2\text{س} + 3)^{\frac{4}{3}}\right)^3 = (3^4)^3$ برفع الطرفين للقوة ٣

$(2\text{س} + 3)^4 = 3^{12}$

$2\text{س} + 3 = \pm (3^{12})^{\frac{1}{4}}$ $2\text{س} + 3 = \pm 3^3$

إما $2\text{س} + 3 = 27$ $2\text{س} = 24$ $\therefore \text{س} = 12$

أو $2\text{س} + 3 = -27$ $2\text{س} = -30$ $\therefore \text{س} = -15$

م.ح $= \{12, -15\}$

لاحظ أن

إذا كان أ > صفر

$\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \text{أ}$

فإن $\text{س} = \text{أ}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

حيث م عدد فردى

إذا كان

$\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \text{أ}$

فإن $\text{س} = \pm\, \text{أ}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

حيث م عدد زوجى

م ، ن ليس بينهما عامل مشترك

ج $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٣\,س^{\frac{٢}{٣}} + ٣٦ = ٠$

$(س^{\frac{٢}{٣}} - ٩)\,(س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

إما $س^{\frac{٢}{٣}} - ٩ = ٠$ أو $س^{\frac{٢}{٣}} - ٤ = ٠$

$س^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٢}$ | $س^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{٢}$

$س = \pm (٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ | $س = \pm (٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$

$س = \pm ٢٧$ | $س = \pm ٨$

م.ح = {٢٧، -٢٧، ٨ ، -٨}

د $\sqrt[٣]{س^{٥}} - ٣١\sqrt[٦]{س^{٥}} - ٣٢ = ٠$

$س^{\frac{٥}{٣}} - ٣١س^{\frac{٥}{٦}} - ٣٢ = ٠$

$(س^{\frac{٥}{٦}} - ٣٢)\,(س^{\frac{٥}{٦}} + ١) = ٠$

إما $س^{\frac{٥}{٦}} - ٣٢ = ٠$ | أو $س^{\frac{٥}{٦}} + ١ = ٠$

$س^{\frac{٥}{٦}} = ٢^{٥}$ | $س^{\frac{٥}{٦}} = -١$ مرفوض

$س = (٢^{٥})^{\frac{٦}{٥}}$

$س = ٦٤$

م.ح = {٦٤}

حاول أن تحل

٥ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$ **ب** $(س + ١)^{\frac{-٥}{٢}} = ٣٢^{\frac{-١}{٢}}$ **ج** $\sqrt[٥]{س^{٤}} - ٣\sqrt[٥]{س^{٢}} = ٤$

تمـــاريـن ٢ – ١

١ اختصر $\frac{\sqrt{٨} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٢}}$

٢ متى تكون العلاقة $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ صحيحة لجميع قيم أ ، ب الحقيقية.

٣ أكمل ما يأتي:

أ $(٨)^{\frac{٢}{٣}}$ في أبسط صورة تساوى ....

ب $(٦\frac{١}{٤})^{\frac{٣}{٢}}$ في أبسط صورة تساوى ....

ج $(\frac{١٦}{٦٢٥})^{-\frac{٣}{٤}}$ في أبسط صورة تساوى ....

د $\sqrt[٣]{(٣\frac{٣}{٨})^{-١}}$ في أبسط صورة تساوى ....

هـ $(٥^{٢} - ٣^{٢})^{\frac{١}{٢}}$ في أبسط صورة تساوى ....

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان $٥^{س} = ٢$ فإن $٢٥^{س}$ تساوى .... (١٠ ، ٦٢٥ ، ٤ ، ٢)

ب $(٢^{٧} \div ٢^{٥})^{-\frac{١}{٢}}$ تساوى .... (٢ ، -٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$)

ج إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن س تساوى .... (٥١٢ ، ١٦ ، ٤ ، ٢)

د أي مما يأتي لا يساوي $(\sqrt[٥]{س^{٤}})$ ($(\sqrt[٥]{س})^{٤}$ ، $\sqrt[٤]{س^{٥}}$ ، $س^{\frac{٤}{٥}}$ ، $(س^{\frac{١}{٥}})^{٤}$)

هـ إذا كان $٤\,س^{٥} = ١٢٨$ فإن س تساوى .... (٤ ، ±٢ ، ٢ ، -٢)

و مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة $(س - ٢)^{٤} = ١٦$ يساوي .... ({صفر} ، {٤} ، {٨} ، {٠، ٤})

ز إذا كان $٣^{أ} = ٤^{ب}$ فإن $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}}$ تساوى .... (٧ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٥)

٥ اكتشف الخطأ:

أ - ٩ = $(-٩)^{\frac{٢}{٢}}$ = $\sqrt{(-٩)^٢}$ = $\sqrt{٨١}$ = ٩

ب إذا كان $س^٤$ = ٨١ فإن س = $\sqrt[٤]{٨١}$ ∴ س = ٣

٦ الربط بالهندسة: إذا كان طول نصف قطر كرة نق يعطى بدلالة الحجم ع من العلاقة نق = $(\frac{٣ع}{٤\pi})^{\frac{١}{٣}}$. أوجد الزيادة في طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣}\pi$ إلى ٣٦π وحدة مكعبة.

٧ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٣٢}$

ب $س^٤$ = ٨١

ج $\sqrt[٣]{(س-١)^٥}$ = ٣٢

د $(س^٢ - ٥س + ٩)^{\frac{٥}{٢}}$ = ٢٤٣

هـ $س^{\frac{٤}{٥}} - ٥س^{\frac{٢}{٥}} + ٤$ = صفر

و س + ١٥ = ٨ $\sqrt{س}$

ز $\sqrt[٣]{س^٢} - ٢٥\sqrt[٣]{س} - ٥٤$ = صفر

ح $(٢س - ١)^٤ = (س + ٣)^٤$

٨ إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٣ص^{\frac{٢}{٣}}$ = ٢٧ فما قيمة س + ص

٩ تفكير ابداعي: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان س < صفر فإن: $\sqrt{س^٢} - \sqrt[٣]{س^٣} - \sqrt{س^٢ - ٢س + ١}$ +١ = ... (س ، -س ، صفر ، - ١)

ب إذا كان أ = $\sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ فأي الأعداد الآتية عدد نسبي .... ($أ^{١٢}$ ، $أ^{١٦}$ ، $أ^{١٨}$ ، $أ^{٢٤}$)

نشاط

استخدم الآلة الحاسبة في تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين)

أ $\sqrt[٣]{\frac{٧^٤ \times ٣^{-٥}}{٢^{-٧}}}$

ب $(٢٣)^{-\frac{٣}{٢}} + (٠,٠١)^{-\frac{٥}{٤}}$



٢ - ٢ الدالة الأسية وتطبيقاتها

Exponential Function and it Applications



نشاط

تتكاثر خلايا البكتريا بطريقة الانقسام المباشر إلى خليتين فى كل مرة خلال فترة زمنية محدودة ثم تنقسم الخليتين إلى أربع خلايا، ثم تنقسم الأربع إلى ثمانٍ، و يستمر انقسام الخلايا بنفس الطريقة خلال نفس الفترات الزمنية وفى نفس الظروف.

يبين الجدول التالى زمن الانقسام لخلية البكتريا بالساعة وعدد الخلايا الناتجة.

الزمن بالساعة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الخلايا	١	٢	٤	....	....	....	٦٤

١) أكمل الجدول السابق.

٢) عبِّر عن عدد خلايا كل انقسام بالصورة الأسية للأساس ٢.

٣) ماذا تتوقع أن تكون عدد الخلايا بعد مرور ٨ ساعات.

٤) عبِّر بالصورة الأسية عن عدد خلايا البكتريا بالانقسام بعد مرور س ساعة.



تعلم

الدالة الأسية Exponential Function



تعريف

إذا كان أ عددًا حقيقيًّا موجبًا ≠ ١ فإن الدالة:

د حيث د: ع ⟵ ع$^{+}$ ، د(س) = أ^{س}

تسمى **دالة اسية** اساسها أ

مثال:

د(س) = ٢^{س} دالة أسية **أساسها** (٢) و**أسها** (س).

د(س) = ٥$^{س+١}$ دالة أسية **أساسها** (٥) و**أسها** (س+١).

د(س) = $(\frac{١}{٣})^{٢س}$ دالة أسية **أساسها** ($\frac{١}{٣}$) و**أسها** (٢س)

سوف تتعلم

- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

- دالة أسية. Expontential Function
- نمو أسى. Exponential Growth
- تضاؤل أسى. Exponential Decay

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

تذكر أن

الدالة الجبرية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقى.

الدالة الأسية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لايساوى الواحد.

حاول أن تحل

(١) بين أى الدوال الآتية دالة أسية.

أ) $د(س) = س^٢$ ب) $د(س) = (٢)^س$

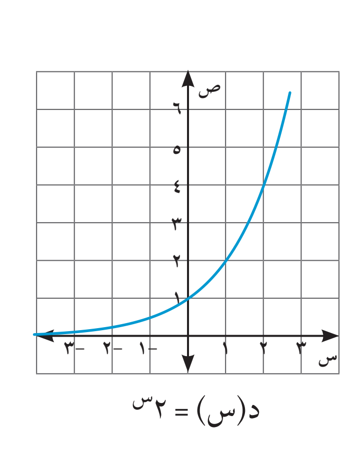
ج) $د(س) = \frac{٣}{س + ١}$ د) $د(س) = س^٣ - ١$

هـ) $د(س) = (\frac{٣}{٤})^{س-١}$ و) $د(س) = (-٢)^س$

التمثيل البياني للدالة الأسية *Graphical Representation of Exponential Function*

مثل بيانيًّا كل من الدالتين $د(س) = ٢^س$ ، $ر(س) = (\frac{١}{٢})^س$

وذلك على فترة اختيارية $س \in [-٣ ، ٣]$



$د(س) = ٢^س$

س	$د_١(س)$	$د_٢(س)$
-٣	$\frac{١}{٨}$	٨
-٢	$\frac{١}{٤}$	٤
-١	$\frac{١}{٢}$	٢
صفر	١	١
١	٢	$\frac{١}{٢}$
٢	٤	$\frac{١}{٤}$
٣	٨	$\frac{١}{٨}$

$ر(س) = (\frac{١}{٢})^س$

خواص الدالة الأسية $د(س) = أ^س$ حيث $أ > ٠$ ، $أ \neq ١$

١) مجال الدالة الأسية $د(س) = أ^س$ هو ع ومداها $]٠، \infty[$

٢) إذا كان $أ > ١$ فإن الدالة تزايدية على مجالها وتسمى دالة نمو أسى معامله أ

أما إذا كان $٠ < أ < ١$ فإن الدالة تناقصية على مجالها وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ.

٣) منحنى الدالة $د(س) = أ^س$ يمر دائمًا بالنقطة (٠ ، ١) لجميع قيم $أ > ٠$ ، $أ \neq ١$

٤) $د(س) = أ^س$ هي دالة احادية (One - to - One)

٥) منحنى الدالة $د(س) = أ^س$ هو صورة منحنى الدالة $د(س) = (\frac{١}{أ})^س$ بالانعكاس على محور الصادات

٦) $أ^س \longrightarrow \infty$ عندما $س \longrightarrow \infty$ حيث $أ > ١$

$أ^س \longrightarrow ٠$ عندما $س \longrightarrow \infty$ حيث $٠ < أ < ١$

حاول أن تحل

(٢) الشكل المقابل يمثل الدالة د المعرفة على ع ، حيث $د(س) = (٣)^س$. ارسم على نفس الشكل منحنى الدالة ر المعرفة على ع ، حيث $ر(س) = (\frac{١}{٣})^س$، ثم أوجد مجال ومدى كل من الدالتين، ثم بيِّن أى منهما تزايدية أو تناقصية مع ذكر السبب.

٣ **تفكير ناقد:** إذا كانت $د(س) = أ^{س}$ حيث $٠ < أ < ١$ رتب كل مما يأتى ترتيبًا تصاعديًا $د(٧)$ ، $د(-٢)$ ، $د(\sqrt{٥})$ ، $د(٠)$.

مثال

١ اذا كانت $د(س) = ٣^{س}$ **فأكمل ما يأتى:**

أ $د(٢) = ...$ ب $د(س + ٢) = ... \times د(س)$ ج $د(س) \times د(-س) = ...$

الحل

أ $د(٢) = ٣^{٢} = ٩$ ب $د(س + ٢) = ٣^{س + ٢} = ٣^{س} \times ٣^{٢} = ٩\ د(س)$

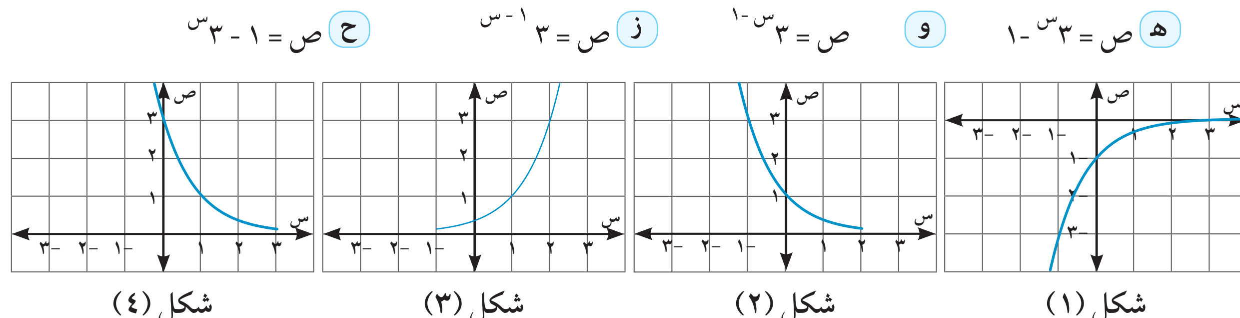
ج $د(س) \times د(-س) = ٣^{س} \times ٣^{-س} = ٣^{س - س} = ٣^{٠} = ١$

حاول أن تحل

٤ في كل من التمارين الآتية اكتب قاعدة الدالة تحت الرسم البياني المناسب حيث:

أ $ص = ٣^{س}$ ب $ص = ٣^{-س}$ ج $ص = -٣^{س}$ د $ص = -٣^{-س}$

هـ $ص = ٣^{س} - ١$ و $ص = ٣^{س - ١}$ ز $ص = ٣^{١ - س}$ ح $ص = ١ - ٣^{س}$



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

شكل (٥) شكل (٦) شكل (٧) شكل (٨)

إثرائى

تطبيقات تؤول إلى معادلات على الصورة $أ^{س} = ب$

النمو والتضاؤل: *Growth and Decay*

يوجد العديد من الظواهر في الحياة اليومية يمكن أن تنمذج كدوال تصف هذه الظواهر من حيث النمو والتضاؤل أو (الأضمحلال) مع مرور الوقت، ومن أمثلة هذه الظواهر دراسة السكان والبكتريا والفيروسات، والمواد المشعة والكهرباء ودرجات الحرارة. وفي مجال الجبر هناك دالتان يمكن استخدامهما بسهولة للتعبير عن مفهوم النمو ومفهوم التضاؤل (الاضمحلال) هما دالة النمو الأسى ودالة التضاؤل الأسى.

أولاً: النمو الأسى: *Exponential growth*

يمكن استخدام الدالة د، حيث $د(ن) = أ\ (١ + ر)^{ن}$ لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة.

(ناقش معلمك لاستنتاج العلاقة السابقة).

الربح المركب: عند حساب جـ جملة مبلغ أ مستثمر في أحد البنوك التي تعطي ربح سنوي مركب ر (نسبة مئوية) لعدد ن من السنوات بفترات تقسيم العائد السنوي إلى س فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة:

$$جـ = أ \left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$$

مثال

٢) أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه في أحد البنوك التي تعطي فائدة سنوية مركبة قدرها ٨ ٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام في كل من الحالات الآتية:

أ) العائد السنوي　　ب) العائد الربع سنوي　　جـ) العائد الشهري

الحل

باستخدام العلاقة $جـ = أ\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$ حيث س التقسيم السنوي:

(أ) العائد السنوي　∴ س = ١　$جـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠} = ١٠٧٩٤,٦٢$ جنيه

(ب) العائد ربع سنوي　∴ س = ٤　$جـ = ٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠ \times ٤} = ١١٠٤٠,٢$ جنيه

(جـ) العائد الشهري　∴ س = ١٢　$جـ = ٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢} = ١١٠٩٨,٢$ جنيه.

حاول أن تحل

٥) يتكاثر النحل فى أحد الخلايا، فيزداد بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع، فإذا كان عدد النحل فى البداية ٦٠ نحلة. اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع، ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

ثانيًا: التضاؤل الأسى: *Exponential decay*

يمكن استخدام الدالة د حيث $د(ن) = أ (١ - ر)^{ن}$ لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة.

مثال

٣) **الربط بالتجارة:** اشترى كريم سيارة جديدة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ جنيه، فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢٪ كل سنة.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد ن سنة من شرائها.

ثانيًا: احسب لأقرب جنيه سعر السيارة بعد مرور ٦ سنوات من شرائها.

الحل

أ = ١٢٠٠٠٠ ، $ر = \frac{١٢}{١٠٠} = ٠,١٢$ ، الفترة الزمنية ن = ٦ سنوات

أولًا: دالة التضاؤل الأسى هى: $د(ن) = أ(١ - ر)^{ن}$ وبالتعويض عن قيم أ ، ر فإن:

$د(ن) = ١٢٠٠٠٠ (١ - ٠,١٢)^{ن}$　أى أن: $د(ن) = ١٢٠٠٠٠ (٠,٨٨)^{ن}$

ثانيًا: بالتعويض عن ن = ٦ فى دالة النمو الأسى:

$د(٥) = ١٢٠٠٠٠(٠,٨٨)^{٦} = ٥٥٧٢٨,٤٩٠٤١$

سعر السيارة المتوقع بعد مرور ٦ سنوات يقدر بمبلغ ٥٥٧٢٨ جنيهًا

حاول أن تحل

٦) **الربط بالطب:** يتناول أحد المرضى ٤٠ مليجرامًا من عقار طبى، و يمكن لجسم المريض أن يتخلص من ١٠٪ من هذا العقار تقريبًا فى الساعة.

أ) اكتب معادلة أسية تمثل كمية العقار المتبقية فى جسم هذا المريض بعد تناول العقار.

ب) قدر كمية العقار المتبقية فى جسم المريض بعد ٤ ساعات من تناول العقار.

تمارين ٢ - ٢

١ أكمل ما يأتي:

أ) تكون الدالة د حيث د(س) = أ^س دالة أسية إذا كانت أ .... ، س ....

ب) الدالة الاسية ر حيث ر(س) = ٣^(س-١) أساسها هو ....

جـ) الدالة و حيث و(س) = $(\frac{-١}{٢})^{س+١}$ ليست دالة أسية لأن ....

د) إحداثيا نقطة تقاطع الدالة الأسية د(س) = أ^س مع المستقيم س = ٠ هي النقطة (........ ، ....)

هـ) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د، ر حيث: د(س) = ٣^س، ر(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ هو ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات الآتية:

أ) تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تزايدية إذا كانت

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

ب) تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تناقصية إذا كانت:

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) -١ < أ < ٠

جـ) الدالة الأسية د حيث د(س) = أ^س ، أ > ١ يقترب خطها البياني من:

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

د) في الدالة الأسية د حيث د(س) = أ^س ، أ > ١ تكون د(س) > ١ عندما:

(أ) س ∈ ع (ب) س ∈ $ع^+$ (جـ) س ∈ $ع^-$ (د) س ∈ ص

هـ) في الدالة الأسية ر حيث ر(س) = أ^س ، (٠ < أ < ١) تكون ٠ < أ^س < ١ عندما س ∈

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ)]١ ، ∞[(د)]-∞ ، ١[

٣ بين أي من الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها:

أ) د(س) = ٢س^٣ ب) د(س) = $\frac{٢}{٣}(٥)^{س}$ جـ) د(س) = $\frac{١}{س - ١}$

د) د(س) = ٣س^٢ - ١ هـ) د(س) = $(\frac{٢}{٣})^{س-١}$ و) د(س) = $(-٧)^{س}$

٤ مثِّل الدالة د في كل مما يأتي بيانيًّا، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها، وبيِّن أي منها تزايدية وأي منها تناقصية:

أ) د(س) = ٣^س ب) د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ جـ) د(س) = -٣ $(٢)^{س}$ د) د(س) = $٢^{س+١}$ + ١

هـ) د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س+٢}$ - ٢ و) د(س) = ٢ $(\frac{٢}{٣})^{س-١}$ + ١ ز) د(س) = -$(\frac{١}{٢})^{٢س}$ + $\frac{٣}{٤}$

٢ - ٣ المعادلات الأسية

Exponential Equations

استكشف

من الجدول الآتى بين متى تتساوى $٢^{\text{س}}$ مع ٢س:

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
٢س	-٤	-٢	٠	....	....	....	....
$٢^{\text{س}}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	....	....	....	....



تعلم

المعادلة الأسية *Exponential Equation*

إذا تضمنت المعادلة متغيرًا في الأس، فإنها تسمى معادلة أسية مثل ($٣^{\text{س}} = ٢٧$) فنجد:

أولًا: إذا كان $\text{أ}^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{ن}}$ حيث $\text{أ} \notin \{٠، ١، -١\}$ فإن $\text{م} = \text{ن}$.

مثال

① أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $٣^{\text{س}+١} = \frac{١}{٢٧}$ ب) $(٢\sqrt{٢})^{\text{س}-٣} = ٨^{\text{س}-٢}$

الحل

أ) $٣^{\text{س}+١} = \frac{١}{٢٧}$ $\therefore ٣^{\text{س}+١} = ٣^{-٣}$

$\therefore$ س + ١ = -٣ ومنها س = -٤ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{-٤\}$

ب) $(٢\sqrt{٢})^{\text{س}-٣} = ٨^{\text{س}-٢}$ $\therefore (٢ \times ٢^{\frac{١}{٢}})^{\text{س}-٣} = (٢^{٣})^{\text{س}-٢}$

$\therefore (٢^{\frac{٣}{٢}})^{\text{س}-٣} = (٢^{٣})^{\text{س}-٢}$ $\therefore ٢^{\frac{٣}{٢}(\text{س}-٣)} = ٢^{٣(\text{س}-٢)}$

$\therefore \frac{٣}{٢}\text{س} - \frac{٩}{٢} = ٣\text{س} - ٦$ بالضرب في ٢

$\therefore$ ٣س - ٩ = ٦س - ١٢ $\therefore$ ٣س - ٦س = ٩ - ١٢

-٣س = -٣ ومنها س = ١ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{١\}$

حاول أن تحل

① أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $٢^{\text{س}-٣} = \frac{١}{١٦}$ ب) $\frac{(٣^{٢} + ٥^{٢})^{\text{س}}}{٦٨^{\text{س}}} = \frac{١}{٣٢}$

ثانيًا: إذا كان $\text{أ}^{\text{م}} = \text{ب}^{\text{م}}$ حيث أ، ب $\notin \{٠، ١، -١\}$، فإن

إما: م = صفر

أو: أ = ب **عندما** م عدد فردي ، أ = ± ب **عندما** م عدد زوجي.

سوف تتعلم

- حل المعادلة الأسية جبريًا.
- حل المعادلة الأسية بيانيًا.

المصطلحات الأساسية

- معادلة أسية *Exponential Equation*
- الحل البياني *Graphical Solution*

الأدوات المستخدمة

- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.
- آلة حاسبة علمية.

مثال

٢ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س-٣} = ٥^{س-٣}$ ب $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$

الحل

أ $٢^{س-٣} = ٥^{س-٣}$ ∴ س - ٣ = صفر ومنها س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

ب $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$ ∴ $٧^{س+١} = ٣^{٢(س+١)}$ ∴ $٧^{س+١} = ٩^{س+١}$

∴ س + ١ = صفر ومنها س = -١ ∴ مجموعة الحل = {-١}

حاول أن تحل

٢ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات

أ $٣^{س-٥} = ٢^{س-٥}$ ب $٤^{س+٢} = ٣^{٢س+٤}$

تفكير ناقد: أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة $س^{س-٢} = ٤^{س-٢}$

مثال

٣ إذا كانت د(س) = $٣^{س}$

أ أثبت أن د(س + ٢) × د(س - ٢) = د(٢س) ب إذا كان د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ أوجد قيمة س

الحل

أ الطرف الأيمن = د(س + ٢) × د(س - ٢) = $٣^{س+٢} × ٣^{س-٢}$

= $٣^{س+٢+س-٢}$ = $٣^{٢س}$ = د(٢س) = الطرف الأيسر

ب ∵ د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ ∴ $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

∴ $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

∴ $٣^{س+١}(٣^{٢} - ١) = ٧٢$

∴ $٣^{س-١} = ٩ = ٣^{٢}$ ∴ س - ١ = ٢ ∴ س = ٣

حاول أن تحل

٣ إذا كان $د_{١}(س) = ٨^{س}$ ، $د_{٢}(س) = ٤^{س}$

أ أثبت أن $\frac{د_{١}(٢س + ١) + د_{٢}(٣س + ٢)}{د_{١}(٢س - ١) + د_{٢}(٣س - ٢)} = ١٢٨$ ب حل المعادلة $د_{١}(٢س) + د_{٢}(٣س - ١) = ٨٠$

مثال

④ إذا كانت د(س) = $٢^{س}$

أوجد س التي تحقق المعادلة: د(س) + د(٥ - س) = ١٢:

الحل

بالتعويض فى المعادلة د(س) + د(٥ - س) = ١٢

$٢^{س} + ٢^{٥-س} = ٢$

$٢^{س} \times ٢^{س} + ٢^{٥-س} \times ٢^{س} = ١٢ \times ٢^{س}$ وذلك بضرب الطرفين فى $٢^{س}$

٢ س + س + ٢٥ - س + س - ١٢ × ٢س = ٠

$٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$ وبتحليل المقدار الثلاثى

$(٢^{س} - ٤)\ (٢^{س} - ٨) = ٠$

إما: $٢^{س} = ٢^{٢}$ ومنها س = ٢

أو: $٢^{س} = ٢^{٣}$ ومنها س = ٣

حاول أن تحل

④ فى المثال السابق أثبت أن: $\frac{د(س + ١)}{د(س - ١)} + \frac{د(س - ١)}{د(س + ١)} = \frac{١٧}{٤}$

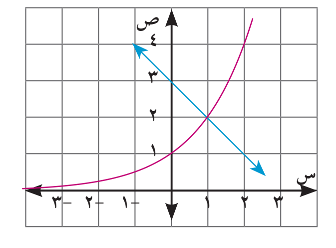
حل المعادلات الأسية بيانيًّا *Solving Exponential Equastions Graphically*



نشاط

⑤ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم في شكل واحد منحنيي كل من الدالتين $د_{١}(س) = ٢^{س}$، $د_{٢}(س) = ٣ - س$، ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س} = ٣ - س$

الحل



باستخدام برنامج Geogebra نرسم منحنيي الدالتين $د_{١}$، $د_{٢}$، ومن الرسم نوجد إحداثيات نقطة التقاطع هي (١، ٢)

نجد من الرسم أن نقطة تقاطع منحنى الدالتين $د_{١}$، $د_{٢}$ هو (١، ٢) لذلك فإن مجموعة حل المعادلة: ٢س = ٣ - س هو {١}.

حاول أن تحل

⑤ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم كلًّا من الدالتين:

$د_{١}(س) = ٢^{س}$ ، $د_{٢}(س) = س + ٢$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س} = س + ٢$

تمارين ٢ – ٣

١ اختر الإجابة الصحيحة:

أ إذا كان $٢^{س+١} = ٨$ ، فإن س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٣

ب إذا كان $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$ ، فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

جـ $(\frac{١}{٢})^{أ^٢-أ-٢} = ١$ حيث أ > صفر، فإن أ = ...

(أ) ١ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س+١} = ٤$ ب $٣^{س-١} = \frac{١}{٩}$ جـ $٧^{س-٢} = ١$

د $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$ هـ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$ و $٣^{س+٣} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$

ز $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$ ح $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$ ط $(\frac{١}{٢})^{س+١} + (\frac{١}{٢})^{س+٣} + (\frac{١}{٢})^{س+٥} = ٨٤$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين:

$٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$

٤ إذا كانت $د_١(س) = ٣^{س}$، $د_٢(س) = ٩^{س}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د_١(٢س-١) + د_٢(س+١) = ٧٥٦$

٥ إذا كانت $د(س) = ٧^{س+١}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠$

٦ أوجد بيانيًّا مستخدمًا أحد برامج الرسوميات مجموعة حل المعادلة:

أ $٣^{س-٢} = ٣ - س$ ب $٢^{س} = ٢س$

٧ تفكير إبداعي: إذا كان $س^٣ = ص^٢$ وكان $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$ فما قيمة ن ؟

٨ الربط بالأعداد: إذا كان مجموع الأعداد ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... + $٢^{ن}$ يُعطى بالعلاقة $جـ_ن = ٢ (٢^{ن} - ١)$

أ أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى في النمط

ب أوجد عدد الحدود في النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠

٩ حل كلًّا من المعادلات الآتية:

أ $٣^{س^٢-٤٢} = (\frac{١}{٣})^{س}$ ب $٧^{٢-س} + ٧^{-س} = ٥٠$

١٠ تفكير ابداعي:

أوجد مجموعة حل المعادلة:

$٩^{س+١} - ٣^{س+٣} - ٣^{س} + ٣ = ٠$.

٢ - ٤ الدالة العكسية

The Inverse Function

فكر و ناقش

الشكل المقابل يمثل علاقة (أب) بين مجموعة من الآباء س = {عماد، عبد الله، أسامة، عاطف} وبناتهم ص = {أمل، نيرة، غادة، جنة} بالاستعانة بالشكل.



١) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "أب" من س إلى ص
هل العلاقة تمثل دالة؟ و إذا كانت دالة هل هي دالة أحادية؟

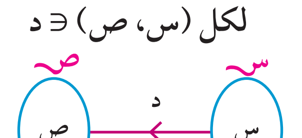
٢) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "إبنة" من ص إلى س هل العلاقة تمثل دالة؟

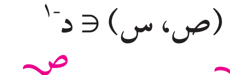
تعلم

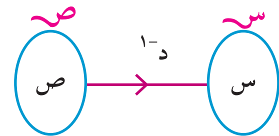
الدالة العكسية *The Inverse Function*

إذا كانت الدالة د دالة أحادية (One-to-One) من مجموعة س إلى مجموعة ص، فإن الدالة $د^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى س إذا كان:

لكل (س، ص) ∈ د فإن (ص، س) ∈ $د^{-1}$







مثال

١ إذا كانت د دالة بيانها كالآتي: د = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}.
أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د ومثلهما في شكل واحد.

الحل

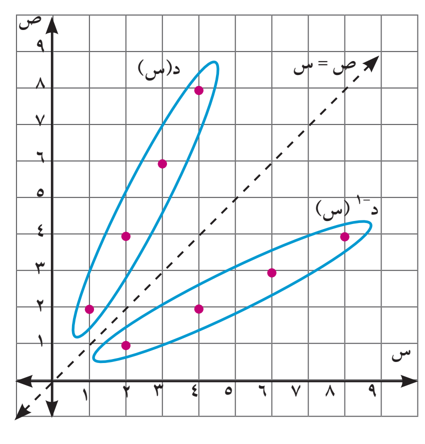
حيث إن الدالة المعطاة أحادية، فإن لها معكوسًا.

∵ د(س) = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}

∴ $د^{-1}$(س) = {(٢، ١)، (٤، ٢)، (٦، ٣)، (٨، ٤)}

نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية $د^{-1}$ متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

أي أن $د^{-1}$ (س) هي صورة د(س) بالانعكاس في المستقيم ص = س



سوف تتعلم
- الدالة العكسية.
- التمثيل البياني للدالة العكسية.
- إيجاد الدالة العكسية لدالة بيانيًا وجبريًا.

المصطلحات الأساسية
- دالة *Function*
- دالة عكسية *Inverse Function*
- دالة أحادية *One – to One Function*
- مجال *Domain*
- مدى *Range*
- انعكاس *Reflection*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة.
- برامج رسومية.
- حاسب آلي.

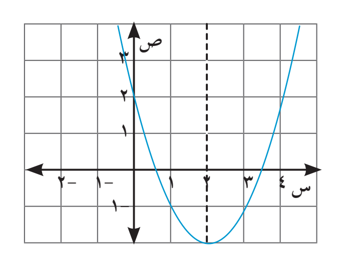
حاول أن تحل

(١) أوجد بيان الدالة العكسية للدالة التي يمثلها الجدول الآتي:

س	−٣	−٢	−١	٠	١
د(س)	٧	٣	١	٠	$\frac{١}{٢}$

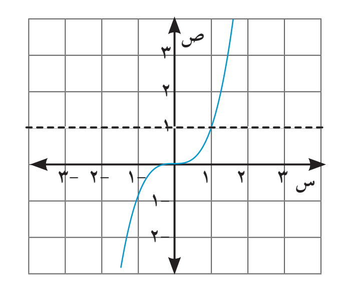
اختبار الخط الرأسي

إذا قطع أي خط رأسي منحنى ما في نقطة واحدة على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة.



اختبار الخط الأفقي

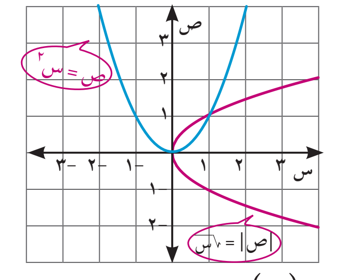
إذا قطع أي خط أفقي منحنى دالة ما في نقطة واحدة، على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة أحادية.



لاحظ أن:

إذا كانت الدالة ليست أحادية (لا تحقق اختبار الخط الأفقي) فإن معكوسها لا يمثل دالة.

مثل ص = س^{٢} (ليست أحادية) معكوسها |ص| = $\sqrt{س}$ لا يمثل دالة.



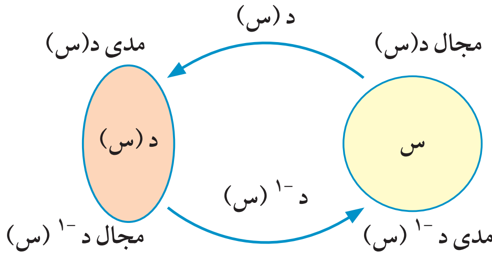
من خواص الدالة العكسية:

١- يقال أن د(س) ، ر(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان

(د ∘ ر) (س) = س و (ر ∘ د) (س) = س

٢- مجال الدالة د(س) = مدى الدالة العكسية د$^{-١}$(س)

مدى الدالة د(س) = مجال الدالة العكسية د$^{-١}$ (س)



تفكير ناقد:

ما مجال الدالة د حيث د(س) = س^{٢} التي يكون فيه للدالة د دالة عكسية، وأوجد هذه الدالة العكسية.

مثال

(٢) أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = ٢س + ١ ومثِّل الدالة ومعكوسها بيانيًا في شكل واحد.

لاحظ أن

لإيجاد الدالة العكسية أولًا نقوم بتبديل المتغيرات، ثم نوجد ص بدلالة س.

الحل

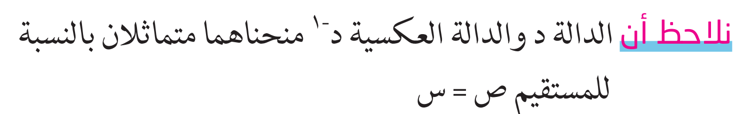
ص = ٢س + ١

∴ س = ٢ص + ١ بتبديل المتغيرات

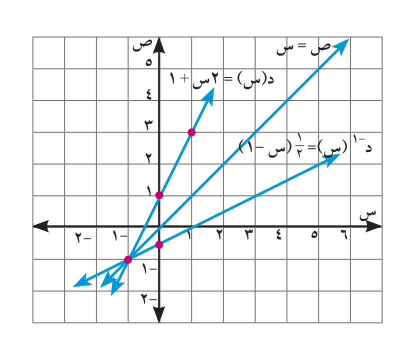
∴ ٢ص = س - ١

∴ ص = $\frac{1}{2}$ (س - ١) أي د$^{-1}$(س) = $\frac{1}{2}$ (س - ١)

س	١	٠	-١
د(س)	٣	١	-١
د$^{-1}$(س)	٠	$-\frac{1}{2}$	-١



نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية د$^{-1}$ منحناهما متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س



حاول أن تحل

٢ أوجد الدالة العكسية للدالة ص = س^{3} ومثلهما في شكل واحد.

مثال

٣ إذا كانت د دالة بحيث د(س) = ٣ + $\sqrt{س - ١}$ فأوجد

أ مجال د(س) ومدى د(س)

ب د$^{-1}$ (س) وعين مجالها ومداها

الحل

أ د(س) معرفة لجميع قيم س - ١ ≥ ٠ أي س ≥ ١

∴ مجال د(س) = [١ ، ∞[

∵ $\sqrt{س - ١}$ ≥ ٠ لجميع قيم س الواقعة في مجال الدالة

∴ ٣ + $\sqrt{س - ١}$ ≥ ٣ ⟸ د(س) ≥ ٣

∴ مدى د(س) = [٣، ∞ [

ب ∵ ص = ٣ + $\sqrt{س - ١}$

باستبدال المتغيرات س ، ص

س = ٣ + $\sqrt{ص - ١}$ س - ٣ = $\sqrt{ص - ١}$ بتربيع الطرفين

(س - ٣)^{2} = ص - ١

ص = (س - ٣)^{2} + ١ د$^{-1}$ (س) = (س - ٣)^{2} + ١

مجال د$^{-1}$(س) = [٣ ، ∞[ومداها [١ ، ∞ [

حاول أن تحل

③ إذا كانت د: $ع^+$ ⟵ ع بحيث د(س) = $\frac{١}{س^٢ + ١}$

أ) أوجد $د^{-١}$(س) وعين مجالها ومداها

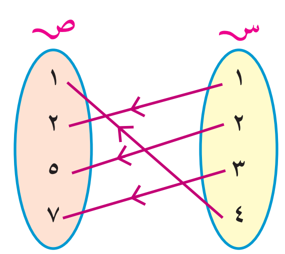
ب) مستخدمًا أحد البرامج الرسومية ارسم الشكل البياني لكل د(س) ، $د^{-١}$(س)

تمارين ٢ – ٤

① أكمل:

أ) إذا كانت الدالة د = {(١، ٤)، (٢، -٣)، (٣، ١)، (٤، ٠)} فإن $د^{-١}$ = ...

ب) الشكل المقابل يمثل دالة د: س ⟵ ص فإن $د^{-١}$ (٢) = ...



جـ) صورة النقطة (٢، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة ....

د) إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٢) = ٦ فإن $د^{-١}$ (٦) = ...

هـ) إذا كان د: س ⟵ ٤س فإن $د^{-١}$: س ⟵ ....



② ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

أ) مجال الدالة هو مجال الدالة العكسية لها. (..................)

ب) الدالة المتزايدة على مجالها يكون دائمًا لها دالة عكسية. (..................)

جـ) الدالة الزوجية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (..................)

د) الدالة الفردية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (..................)

③ أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤

ب) د (س) = ٤س

جـ) د(س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$

د) د (س) = $\frac{٣}{س}$

هـ) د(س) = ٨ $س^٣$ - ١

و) د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س}$

ز) د(س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$

ح) د (س) = $س^٢$ حيث س ≥ صفر

ط) د(س) = $(س - ١)^٢$ + ٢ حيث س ≥ ١

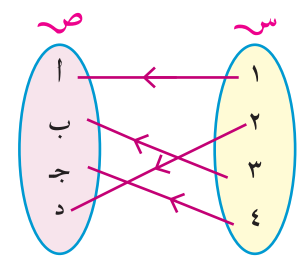
ى) د(س) = $س^٢$ + ٨ س + ٧ حيث س ≥ -٤

ك) د(س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ حيث -٣ ≤ س ≤ ٠

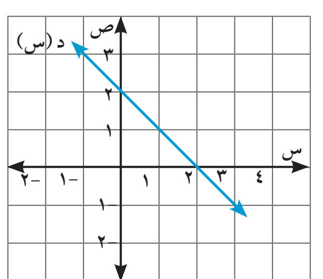
ل) د(س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ٣

٤ أ إذا كانت د(س) = ٥س. أوجد د$^{-1}$(س) ومثلهما بيانيًا.

ب الشكل المقابل يمثل دالة د من سـ إلى صـ فأوجد قيمة د$^{-1}$ (ب) + ٢ د$^{-1}$(جـ).



٥ في كل من الأشكال الآتية. ارسم في نفس الشكل منحنى الدالة العكسية د$^{-1}$(س)



٦ اكتشف الخطأ:

حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة د(س) = $\frac{\text{س - ٥}}{\text{س}}$

حل وائل

∵ د(س) = $\frac{\text{س - ٥}}{\text{س}}$

∵ د$^{-1}$(س) = $\frac{\text{١}}{\text{د(س)}}$

∴ د$^{-1}$(س) = ١ ÷ $\frac{\text{س -٥}}{\text{س}}$

= ١ × $\frac{\text{س}}{\text{س -٥}}$

د$^{-1}$(س) = $\frac{\text{س -٥}}{\text{س}}$

حل رنا

∴ ص = $\frac{\text{س - ٥}}{\text{س}}$

∴ س = $\frac{\text{ص - ٥}}{\text{ص}}$ بتبديل المتغيرات

∴ ص س = ص - ٥ بالضرب التبادلي

∴ ص س - ص = -٥

∴ ص (س - ١) = -٥

∴ د$^{-1}$(س) = $\frac{\text{-٥}}{\text{س - ١}}$

أي من الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

٧ سؤال مفتوح: هل يمكن أن تكون الدالة د هي نفسها الدالة العكسية د$^{-1}$؟ إن كانت العبارة صحيحة أعط أمثلة على ذلك.

٨ في كل مما يأتي عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية:

أ د(س) = س^{٢} ب د (س) = س^{٣} جـ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س

٢ - ٥ الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني

Logarithmic Function and Its Graph

سوف تتعلم

- تعريف الدالة اللوغاريتمية.
- التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية.
- التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

المصطلحات الأساسية

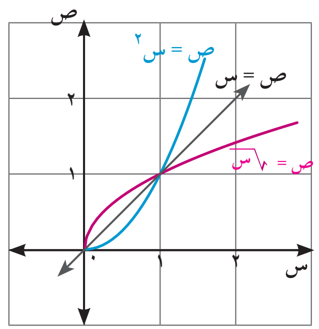
- لوغاريتم Logarithm
- دالة عكسية Inverse Function
- مجال Domain
- اللوغاريتم المعتاد Common Logarithm

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- حاسب آلي.

التمثيل البياني للدالة العكسية للدالة الأسية

استكشف



علمت أن الدالة ص = $\sqrt{\text{س}}$ هي الدالة العكسية للدالة ص = س^{٢} لكل س ≥ صفر (صورتها بالانعكاس في المستقيم ص = س)

فهل يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية د حيث د(س) = ٢$^{\text{س}}$ بيانيًّا من خلال تمثيل قيم س، ص للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

ص = ٢$^{\text{س}}$	
س	ص
-٣	$\frac{١}{٨}$
-٢	$\frac{١}{٤}$
-١	$\frac{١}{٢}$
٠	١
١	٢
٢	٤
٣	٨

س = ٢$^{\text{ص}}$	
س	ص
$\frac{١}{٨}$	-٣
$\frac{١}{٤}$	-٢
$\frac{١}{٢}$	-١
١	٠
٢	١
٤	٢
٨	٣

نجد مما سبق أن معكوس ص = ٢$^{\text{س}}$ هو س = ٢$^{\text{ص}}$ ويسمى المتغير ص في المعادلة س = ٢$^{\text{ص}}$ لوغاريتم س. ويكتب ص = لو$_{٢}$ س ويقرأ **ص تساوي لوغاريتم س للأساس ٢**

تعلم

الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

إذا كان أ ∈ ع$^{+}$ - {١} فإن الدالة د حيث د: ع$^{+}$ ⟵ ع حيث د(س) = لو$_{\text{أ}}$ س هي الدالة العكسية للدالة ص = أ$^{\text{س}}$

وتسمى د(س) = لو$_{\text{أ}}$ س بالدالة اللوغاريتمية

- مجال الدالة اللوغاريتمية = ع$^{+}$
- مدى الدالة اللوغاريتمية = ع
- الصورة ص = لو$_{\text{أ}}$ س تكافئ الصورة أ$^{\text{ص}}$ = س



إرشادات للدراسة

تسمى لو$_{\text{أ}}$ س = ص بالصورة اللوغاريتمية

وتسمى أ$^{\text{ص}}$ = س بالصورة الأسية المكافئة لها.

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية:

أ $٢^{٤} = ١٦$ تكافئ $لو_{٢}\ ١٦ = ٤$ ب $٥^{٢} = ٢٥$ تكافئ $لو_{٥}\ ٢٥ = ٢$

ج $(\frac{١}{٢})^{٤} = \frac{١}{١٦}$ تكافئ $لو_{\frac{١}{٢}}\ \frac{١}{١٦} = ٤$ د $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ تكافئ $لو_{١٠}\ ٠,٠١ = -٢$

حاول أن تحل

(١) حول من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

أ $٧^{٢} = ٤٩$ ب $(\sqrt{٢})^{-١٠} = ٥١٢$ ج $(\frac{٣}{٥})^{٤} = \frac{٨١}{٦٢٥}$ د $٥^{-٣} = \frac{١}{١٢٥}$

اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠:

إذا كان أساس اللوغاريتم ١٠ يسمى باللوغاريتم المعتاد ويكتب بدون أساس.

مثل: $لو_{١٠}\ ٧$ تكتب لو٧ $لو_{١٠}\ ١٢٧$ تكتب لو١٢٧

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية:

أ $لو_{٣}\ ٨١ = ٤$ تكافئ $٣^{٤} = ٨١$ ب $لو_{٢}\ ١٢٨ = ٧$ تكافئ $٢^{٧} = ١٢٨$

ج $لو\ \frac{١}{١٠٠} = -٢$ تكافئ $١٠^{-٢} = \frac{١}{١٠٠}$ د $لو_{٨١}\ ٢٧ = \frac{٣}{٤}$ تكافئ $٨١^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$

حاول أن تحل

(٢) حول من الصورة اللوغاريتمية للصورة الأسية:

أ $لو_{٥}\ ١٢٥ = ٣$ ب $لو_{٣}\ \frac{١}{٢٤٣} = -٥$ ج $لو_{٤}\ ١ = ٠$ د $لو\ ١٠٠٠ = ٣$

مثال

حساب قيمة لوغاريتم عدد لأساس معلوم

(١) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ لو٠,٠٠١ ب $لو_{٣}\ \sqrt[٤]{٢٧}$

الحل

أ بوضع ص = لو ٠,٠٠١

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

$١٠^{ص} = ٠,٠٠١$

$١٠^{ص} = (\frac{١}{١٠})^{٣}$ وضع العدد بالصورة الأسية

$١٠^{ص} = (١٠)^{-٣}$ من خواص الأسس

ص = -٣ لذلك فإن لو ٠,٠٠١ = -٣

ب بوضع ص = $لو_{٣}\ \sqrt[٤]{٢٧}$

بالتحويل إلى الصورة الأسية

$٣^{ص} = ٣^{\frac{٣}{٤}}$ من خواص الأسس

ص = $\frac{٣}{٤}$

لذا فإن $لو_{٣}\ \sqrt[٤]{٢٧} = \frac{٣}{٤}$

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمة كل من: أ لو ٠,٠٠٠٠١ ب $لو_{\frac{١}{٢}}\ ١٢٨$

مثال

(٢) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $لو_{٣} (٢س - ٥) = ١$ (ب) $لو_{س} (س + ٢) = ٢$

الحل

(أ) المعادلة لكل قيم س التي تحقق ٢س - ٥ > صفر؛ أي س > $\frac{٥}{٢}$ (مجال تعريف المتغير)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

∴ $٣^{١}$ = ٢س - ٥   ∴ ٢ س = ٨

∴ س = ٤ ∈ مجال تعريف المتغير   ∴ مجموعة الحل هي {٤}

(ب) المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق { س + ٢ > صفر ، س > صفر ، س ≠ ١ } **أي** { س > -٢ ، س > صفر ، س ≠ ١ }

أي]صفر، ∞[- {١} (مجال تعريف المتغير)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

∴ $س^{٢}$ = س + ٢   ∴ $س^{٢}$ - س - ٢ = صفر

∴ (س - ٢) (س + ١) = صفر   ∴ س = ٢ أو س = -١

∵ س = -١ ∉ مجال تعريف المتغير   ∴ مجموعة الحل = {٢}

حاول أن تحل

(٤) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $لو_{٨١} س = \frac{٣}{٤}$ (ب) $لو_{س} ٥س = ٢$

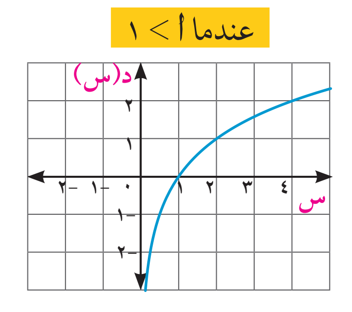


تعلم

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية: *Graphical Representation of the Logarithmic Function*

تمثل الدالة د حيث د(س) = $لو_{أ}$ س حيث أ ≠ ١ بيانيًّا كما في الأشكال الآتية:

عندما أ > ١



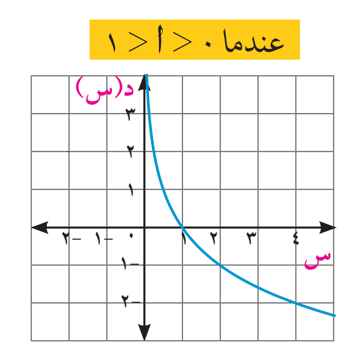
المجال: $ع^{+}$

المدى: ع

التقاطع مع محور س: (١، ٠)

الاطراد: تزايدية $ع^{+}$

عندما ٠ < أ < ١



المجال: $ع^+$

المدى: ع

التقاطع مع محور س: (١، ٠)

الاطراد: تناقصية على مجالها $ع^+$

تفكير ناقد: هل يمكنك استنتاج العلاقة بين منحنى الدالة الأسية ومنحنى الدالة اللوغاريتمية وضح ذلك.

مثال

٣) مثل الدوال الآتية بيانيًا:

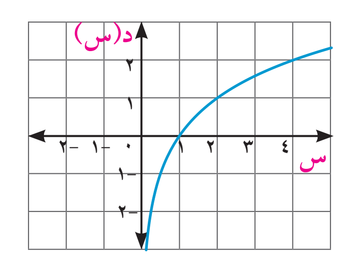
أ) د(س) = $لو_{٢}$ س

ب) د(س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س

الحل

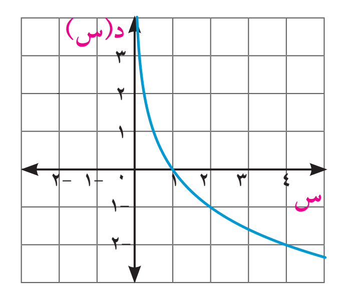
أ) **لاحظ أن: الأساس** ٢ > ١

س	٢	١	٤
د(س)	١	٠	٢



ب) **لاحظ أن:** الأساس: ٠ < $\frac{١}{٢}$ < ١

س	٢	١	٤
د(س)	-١	٠	-٢



استخدام الآلة الحاسبة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغاريتمات على النحو الآتي:

١) **لإيجاد** $لو_{٢}$ ٤ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية: log 2 REPLAY 4 = 2

٢) **لإيجاد** لو ٣٨ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية: log 3 8 = 1.579783597

تدريب

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل من:

أ) $لو_{٢}$ ١٢ ب) $لو_{٣}$ ٢٤ ب) $لو_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ د) لو ١٢٨

تمــاريـن ٢ – ٥

١ عبِّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة:

أ) $٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$ ب) $(\frac{٢}{٥})^{٤} = \frac{١٦}{٦٢٥}$ ج) $٥^{\text{صفر}} = ١$ د) $(\sqrt{٢})^{٤} = ٤$

٢ عبِّر عن كل مما يأتي بصورة أسية مكافئة:

أ) $\text{لو}\ ١٠٠ = ٢$ ب) $\text{لو}_{٢}\ ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٢}$ ج) $\text{لو}_{٧}\ ١ = \text{صفر}$ د) $\text{لو}_{\sqrt{١١}}\ ١٢١ = ٤$

٣ عيِّن مجال الدالة د في كل مما يأتي:

أ) $\text{د(س)} = \text{لو}_{٢}\ (\text{٢س}+١)$ ب) $\text{د(س)} = \text{٢لوس}$ ج) $\text{د(س)} = \text{لو}_{(٥-\text{س})}\ (\text{س}-٣)$

٤ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ) $\text{لو}_{٢}\ ١٦$ ب) $\text{لو}_{\sqrt{٥}}\ ٥$ ج) $\text{لو}_{٨}\ ١$ د) $\text{لو}_{٣}\ ٣\sqrt{٣}$

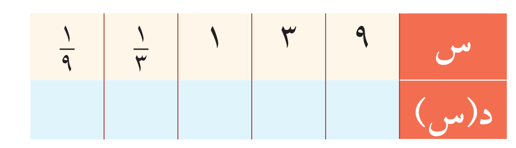
٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $\text{لو}_{٣}\ ٢٧ = \text{س} + ٢$ ب) $\text{لو}_{\text{س}}\ (\text{٢س} + ٣) = ٢$ ج) $\text{لو}\ (\text{٢س} + ١) = \text{صفر}$

د) $\text{لو}_{٢}\ (\text{لو}_{٣}\ \text{س}) = ١$ هـ) $\text{لو}_{٤}\ [١٣ + \text{لو}_{٢}\ (\text{س}-١)] = ٢$ و) $\text{لو}_{٢}\ (٤^{\text{س}} - ٢) = \text{س}$

٦ مثل بيانيًّا كل من الدوال الآتية:

أ) $\text{د(س)} = \text{لو}_{٣}\ \text{س}$ ب) $\text{د(س)} = \text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ (\text{س}+١)$



س	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$
د(س)					

س	$-\frac{٧}{٨}$	$-\frac{١}{٢}$	صفر	١	٣	٧
د(س)						

٧ ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر، د حيث $\text{ر(س)} = \text{لو}_{٢}\ \text{س}$، $\text{د(س)} = ٦ - \text{س}$، ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = ٦ - \text{س}$.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٨ إذا كان $\text{لو}_{٣}\ \text{س} = ٢$ فإن س = ...

أ) ٩ ب) ٨ ج) ٣ د) ٥

٩ إذا كان $\text{لو}_{\text{أ}}\ ١٦ = ٤$ فإن أ ∈ ....

أ) {١٦} ب) {٢} ج) {٢، -٢} د) {١}

١٠ $\text{لو}_{٥}\ ١٢٥ =$ ....

أ) $\sqrt{٣}$ ب) ٣ ج) ٥ د) ١٢٥

(١١) مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{(١-س)}$ ٣ هو ....

أ]-∞، ٠[∪]٠، ١[ب]-∞، ١[ج]١، ∞[د]-١، ١[

(١٢) لو ١٠٠ = ...

أ ١   ب ٢   ج ٣   د -١

(١٣) إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) = ...



أ ١   ب ٢   ج $\frac{١}{٤}$ د -٢

(١٤) الشكل المقابل يمثل الدالة ....

أ ص = ٣$^{س-١}$ ب ص = ٣$^{س+١}$

ج ص = لو$_{٣}$ (٢-س)   د ص = لو$_{٣}$ (٣-س)



(١٥) أوجد قيمة س فى كل مما يأتى وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:



أ لو$_{٣}$ ٨١   ب لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ ج لو$_{\sqrt{٧}}$ ٣٤٣   د لو ٠,٠٠١

(١٦) أوجد قيمة كل مما يأتى وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:



أ لو$_{٨١}$ ٣^{س} = $\frac{٣}{٤}$ ب لو$_{٣}$ (٢ س - ٥) = ٠   ج لو$_{س}$ (س + ٦) = ٢

د لو$_{٥}$ لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ س = ٠   هـ لو$_{٣}$ ($\frac{س^{٢}}{٢س-٣}$) = ١   و لو$_{٥}$ |٢ س +١| = ١

(١٧) الربط بالتعليم: إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التي درسها في الصف الأول الثانوي وعدد الأشهر (ن) التي تبدأ من نهاية تدريس الصف هي: د(ن) = ٧٠ - ٤ لو$_{٢}$ (ن + ١)

فأوجد درجات هذا الطالب:

أولًا: في نهاية تدريس الصف الأول الثانوى (ن = ٠)

ثانيًا: بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوى.

(١٨) تطبيقات: في دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته في أحد المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى في نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د(ن) = ٨٥ - ٢٥لو(ن + ١) حيث ن عدد الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د(ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). أوجد.

أ درجة الطالب في أول امتحان لهذه المادة.

ب درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة.

ج درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة.



٢ - ٦ بعض خواص اللوغاريتمات

Some Properties of Logarithms

سوف تتعلم

- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

- معادلة لوغاريتمية. *Logarithmic Equations*
- مقياس ريختر. *Richter Scale*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.

استكشف

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

١) (لو$_٢$ ٤ + لو$_٢$ ٨) ، لو$_٢$ ٣٢ ٢) (لو ٤٠ + لو $\frac{٥}{٢}$) ، لو ١٠٠

٣) (لو$_٣$ ٢٧ - لو$_٣$ ٩)، لو$_٣$ ٣ ماذا تستنتج مما سبق؟

تعلم

بعض خواص اللوغاريتمات *Some Properties of Logarithms*

إذا كان : أ ∈ ع$^+$ - {١} فإن: ١) لو$_أ$ أ = ١ ٢) لو$_أ$ ١ = صفر

حاول إثبات كل من ١ ، ٢ من تعريف اللوغاريتم.

٣) خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

لو$_أ$ س ص = لو$_أ$ س + لو$_أ$ ص حيث س، ص ∈ ع$^+$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

ضع ب = لو$_أ$ س ، جـ = لو$_أ$ ص

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

س = أ^{ب} ، ص = أ^{جـ}

فتكون س ص = أ^{ب} × أ^{جـ} **أي أن** س ص = أ$^{ب + جـ}$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون: لو$_أ$ س ص = ب + جـ

وبالتعويض عن قيمتي ب، جـ تكون لو$_أ$ س ص = لو$_أ$ س + لو$_أ$ ص

مثال

١) أوجد قيمة لو$_٢$ ١٠ في أبسط صورة إذا كان لو$_٢$ ٥ ≃ ٢,٣٢١٩ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

$لو_٢ ١٠ = لو_٢ (٢ \times ٥)$

$= لو_٢ ٢ + لو_٢ ٥$ — باستخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= ١ + ٢,٣٢١٩ \simeq ٣,٣٢١٩$ — باستخدام الخاصية (١)، بالتعويض عن $لو_٢ ٥ \simeq ٢,٣٢١٩$

التحقيق باستخدام الآلة الحاسبة:





log 2 REPLAY 1 0 = 3,321928095

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة $لو_٢ ١٥$ في أبسط صورة إذا كان $لو_٢ ٥ \simeq ١,٤٦٥$ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

٤) خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

$لو_أ \frac{س}{ص} = لو_أ س - لو_أ ص$ حيث س، ص $\in ع^+$ (حاول أن تثبت صحة العلاقة)

مثال

(٢) أوجد قيمة المقدار: لو٣٠ - لو٣ .

الحل

$لو٣٠ - لو٣ = لو \frac{٣٠}{٣} = لو ١٠ = ١$

حاول أن تحل

(٢) أثبت باستخدام خاصية القسمة في اللوغاريتمات أن: لو٢ = ١ - لو٥

٥) خاصية لوغاريتم القوة:

$لو_أ س^ن = ن لو_أ س$ حيث ن $\in$ ع ، س > ٠.

مثال

(٣) أوجد في أبسط صورة $لو_٥ \sqrt[٤]{١٢٥}$

الحل

$لو_٥ \sqrt[٤]{١٢٥} = لو_٥ (٥)^{\frac{٣}{٤}} = \frac{٣}{٤} لو_٥ ٥ = \frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$

لاحظ أن

$(\sqrt[٤]{١٢٥} = \sqrt[٤]{٥^٣} = ٥^{\frac{٣}{٤}})$

حاول أن تحل

③ ضع في أبسط صورة

لو$_{٣}$ $\sqrt[٥]{٢٤٣}$ ، لو$_{٧}$ $\sqrt[٤]{٣٤٣}$

لاحظ أن: لو$_{أ}$ $(\frac{١}{س})$ = - لو$_{أ}$ س حيث س ∈ $ع^{+}$

٦) خاصية تغيير الأساس:

إذا كانت س ∈ $ع_{+}$ ، ص ، أ ∈ $ع^{+}$ - {١}، أثبت أن: لو$_{ص}$ س = $\frac{لو_{أ} س}{لو_{أ} ص}$

البرهان **(لا يمتحن فيه الطالب)**

بوضع: ع = لو$_{ص}$ س

$ص^{ع}$ = س بالتحويل إلى الصورة الأسية

ع لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ س يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

فتكون ع = $\frac{لو_{أ} س}{لو_{أ} ص}$ أي أن: لو$_{ص}$ س = $\frac{لو_{أ} س}{لو_{أ} ص}$

حاول أن تحل

④ استخدم الخاصية السابقة في إيجاد قيمة كل من: (أ) لو$_{٤}$ ٨ (ب) لو$_{٩}$ ٢٤٣

٧- خاصية المعكوس الضربي: لو$_{أ}$ ب = $\frac{١}{لو_{ب} أ}$

تفكير ناقد: إذا كانت أ، ب ∈ $ع^{+}$ - {١} فأثبت أن لو$_{أ}$ ب = $\frac{١}{لو_{ب} أ}$ ثم استخدم ذلك لإيجاد قيمة: لو$_{٣}$ ٧ × لو$_{٧}$ ٣ في أبسط صورة.

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة:

مثال

④ اختصر لأبسط صورة:

(أ) ٢لو٢٥ + لو$(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥})$ + ٢لو٣ - لو٣٠ (ب) لو$_{٥}$ ٤٩ × لو$_{٨}$ ٥ × لو$_{٩}$ ٨ × لو$_{٧}$ ٩

الحل

أ) المقدار = لو $٢٥^{٢}$ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + لو $٣^{٢}$ - لو ٣٠ **خاصية ٥**

= لو $(٢٥^{٢} \times \frac{٨}{١٥} \times ٣^{٢} \times \frac{١}{٣٠})$ **خاصية ٣، ٤**

= لو ١٠٠ = ٢

ب) المقدار = $\frac{\text{لو٤٩}}{\text{لو٥}} \times \frac{\text{لو٥}}{\text{لو٨}} \times \frac{\text{لو٨}}{\text{لو٩}} \times \frac{\text{لو٩}}{\text{لو٧}}$ **خاصية ٦**

= $\frac{\text{لو٤٩}}{\text{لو٧}} = \frac{\text{٢لو٧}}{\text{لو٧}} = ٢$

حاول أن تحل

⑤ اختصر: لو ٠,٠٠٩ - لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو $\frac{٥}{٨}$ ١٥ - لو $\frac{١}{١٢}$

⑥ أثبت أن: $\frac{\text{لو٧٢٩ - لو٦٤}}{\text{لو٩ - لو٤}} = ٣$

⑦ إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٨$س ص، أثبت أن: ٢لو (س + ص) = ١ + لوس + لوص

حل المعادلات اللوغاريتمية *Solving Logarithmic Equations*

مثال

⑤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $\text{لو}_{٣}$ (س - ١) + $\text{لو}_{٣}$ (س + ١) = $\text{لو}_{٣}$ ٨   ب) $\text{لو}_{٣}$ س + $\text{لو}_{س}$ ٣ = ٢

الحل

أ) المعادلة معرفة لكل س ∈ {س: س - ١ > صفر} ∩ {س: س + ١ > صفر}

أي س > ١ (مجال تعريف المتغير)

$\text{لو}_{٣}$ (س - ١) + $\text{لو}_{٣}$ (س + ١) = $\text{لو}_{٣}$ ٨

∴ $\text{لو}_{٣}$ (س - ١) (س + ١) = $\text{لو}_{٣}$ ٨ **خاصية ٣**

∴ $س^{٢}$ - ١ = ٨   ∴ $س^{٢}$ = ٩   ومنها س = ±٣

وحيث إن س = -٣ لا تنتمي لمجال تعريف المتغير   ∴ مجموعة الحل = {٣}

ب) المعادلة معرفة لكل س > صفر ، س ≠ ١

∴ $\text{لو}_{٣}$ س + $\frac{١}{\text{لو}_{٣} س}$ = ٢ **خاصية ٧**

∴ $(\text{لو}_{٣}\text{ س})^{٢} + ١ = ٢\text{لو}_{٣}\text{ س}$ بالضرب في $\text{لو}_{٣}\text{ س}$

∴ $(\text{لو}_{٣}\text{ س})^{٢} - ٢\text{لو}_{٣}\text{ س} + ١ =$ صفر ∴ $(\text{لو}_{٣}\text{ س} - ١)^{٢} =$ صفر

∴ $\text{لو}_{٣}\text{ س} = ١$ ∴ س = ٣ ∋ مجال تعريف المتغير

∴ مجموعة الحل = {٣}

٩ حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية في ع:

أ $\text{لو}_{٣}\text{ س} + \text{لو}_{٣}\text{ (س + ٢)} = ١$ ب $\text{لو}(٨ - \text{س}) + ٢\text{لو}\sqrt{\text{س} - ٦} = ٠$ ج $\text{لوس} - \text{لو}_{\text{س}}\ ١٠٠ = ١$

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات *Solving Exponential Equations Using Logarithms*

مثال

استخدام الآلة الحاسبة فى حل المعادلات اللوغاريتمية

٦ أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ $٢^{\text{س}+١} = ٥$ ب $٥^{\text{س}-٢} = ٣ \times ٤^{\text{س}+١}$

الحل

أ $٢^{\text{س}+١} = ٥$ يأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ $\text{لو}٢^{\text{س}+١} = \text{لو}٥$ ∴ $(\text{س} + ١)\ \text{لو}٢ = \text{لو}٥$

∴ $\text{س} + ١ = \frac{\text{لو}٥}{\text{لو}٢}$ أي أن: $\text{س} = \frac{\text{لو}٥}{\text{لو}٢} - ١$ ∴ $\text{س} \simeq ١,٣٢$

استخدام الآلة الحاسبة:

log 5) ÷ log 2) - 1 = 1,321928095

ب $٥^{\text{س}-٢} = ٣ \times ٤^{\text{س}+١}$ يأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ $\text{لو}٥^{\text{س}-٢} = \text{لو}(٣ \times ٤^{\text{س}+١})$ ∴ $\text{لو}٥^{\text{س}-٢} = \text{لو}٣ + \text{لو}٤^{\text{س}+١}$

∴ $(\text{س} - ٢)\ \text{لو}٥ = \text{لو}٣ + (\text{س} + ١)\ \text{لو}٤$ ∴ $\text{س لو}٥ - ٢\text{لو}٥ = \text{لو}٣ + \text{س لو}٤ + \text{لو}٤$

∴ $\text{س لو}٥ - \text{س لو}٤ = \text{لو}٣ + \text{لو}٤ + ٢\text{لو}٥$ ∴ $\text{س}\ (\text{لو}٥ - \text{لو}٤) = \text{لو}٣ + \text{لو}٤ + ٢\text{لو}٥$

∴ $\text{س} = \frac{\text{لو}٣ + \text{لو}٤ + ٢\text{لو}٥}{\text{لو}٥ - \text{لو}٤} \simeq ٢٥,٥٦$

استخدم الآلة الحاسبة:

log 3) + log 4) + 2 log 5) = ÷ (log (5)

- log 4 = 25,56104553

حاول أن تحل

٩ أوجد قيمة س لأقرب رقم عشري واحد في كل مما يأتي:

أ $٣^{٧-٢س} = ١٣,٤$ ب $٧^{س-٢} = ٤^{س+٣}$

مثال

تطبيقات على قوانين اللوغاريتمات

٧ الربط بالجيولوجيا: إذا كانت درجة قوة الزلزال على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\left(\frac{ش}{ش_.}\right)$، حيث ش هي شدة الزلزال، ش. الشدة الابتدائية، وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال (أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس).

أ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذي شدته تعادل $١٠^٦$ مرة قدره الشدة الابتدائية.

ب في عام ١٩٨٩ حدث زلزال بقوة ٧,١ على مقياس ريختر. احسب شدته.

الحل

أ ∵ د = لو $\left(\frac{ش}{ش_.}\right)$ ، ش = $١٠^٦$ ش. ∴ د = لو $\left(\frac{١٠^٦ ش_.}{ش_.}\right)$ = لو $١٠^٦$ = ٦ لو ١٠ = ٦

أي أن الزلزال درجته ٦ على مقياس ريختر.

ب ∵ درجة الزلزال = ٧,١

∴ ٧,١ = لو $\left(\frac{ش}{ش_.}\right)$ ∴ $\frac{ش}{ش_.}$ = $١٠^{٧,١}$ فتكون ش = $١٠^{٧,١}$ ش.

أي أن شدة الزلزال تعادل ١٢٥٩٠٠٠٠ مرة تقريبًا قدر الشدة الابتدائية.

حاول أن تحل

١٠ إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداء من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة ع = $١٠^٥$ $(١,٣)^{ن-٢٠١٠}$ ، حيث ع عدد السكان ، ن السنة

أ احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

ب في أي سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة.

تمارين ٢ – ٦

١ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

أ) لو ١٠٠٠ ب) لو$_{٢}$ ٣٢ ج) لو$_{\frac{١}{٤}}$ ١٦ د) لو$_{٧}$ ٤٩

هـ) لو ٠,٠٠١ و) لو$_{٨}$ ٢ ز) لو$_{٨}$ ١ ح) لو$_{ص}$ $\sqrt{ص}$

٢ اختصر لأبسط صورة

أ) لو٢ + لو٥ ب) لو$_{٥}$ ١٥ - لو$_{٥}$ ٣ ج) $\frac{لو٢٥}{لو٥}$

د) لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ هـ) لو ٥٤ - ٣ لو٣ - لو٢ و) ١ + لو٣ - لو٢ - لو١٥

ز) لو$_{اب جـ}$ ا + لو$_{اب جـ}$ ب + لو$_{اب جـ}$ جـ ح) $\frac{١}{لو_{٢}\ ١٢} + \frac{١}{لو_{٨}\ ١٢} + \frac{١}{لو_{٩}\ ١٢}$

٣ علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ، حيث س ، ص ∈ ع$^{+}$ ، ا، ب ∈ ع$^{+}$ - {١}:

أ) لو$_{ا}$ (س + ص) = لو$_{ا}$ س + لو$_{ا}$ ص ( )

ب) لو$_{ا}$ (س + ص) = لو$_{ا}$ س × لو$_{ا}$ ص ( )

ج) لو$_{ا}$ (س ص) = لو$_{ا}$ س + لو$_{ا}$ ص ( )

د) لو٢س^{٥} = ٥لو٢س ( )

هـ) لو$_{ا}$ $(\frac{س}{ص})$ = لو$_{ا}$ س + لو$_{ا}$ ص$^{-١}$ ( )

و) $\frac{لو_{ا}\ س}{لو_{ا}\ ص} = \frac{لو_{ب}\ س}{لو_{ب}\ ص}$ ( )

ز) إذا كان س < صفر فإن لو$_{ا}$ س^{٤} = ٤لو$_{ا}$ س ( )

٤ إذا كان لو٢ = س^{٨}، لو٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كل من: لو٦ ، لو$_{١٨}$ ١٢

٥ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

أ) ٧$^{٣س - ٢}$ = ٥ ب) ٧$^{س+١}$ = ٣$^{س-٢}$ ج) $\frac{٥}{١٠^{٢س}}$ = ٧ د) س$^{لو س}$ = ١٠٠ س

٦ أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ) لو$_{٤}$ س = ١ - لو$_{٤}$ (س - ٣) ب) لو$_{٣}$ (س + ٦) = ٢ لو$_{٣}$ س ج) لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١

د) (لو س)^{٢} - لو س^{٢} = ٣ هـ) (لو س)^{٣} = لو س^{٩} و) ٣$^{لو س}$ = ٢$^{لو ٣}$

ز) لو$_{٣}$ س = لو$_{س}$ ٣　　ح) لو$_{٢}$ س + لو$_{س}$ ٢ = ٢　　ط) لو$_{٢}$ (٢^{س} - ٤) + س - ٥ = صفر

٧) استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كل من:

أ) لو ٣,١٥　　ب) لو$_{٢}$ ٢٥　　ج) ٢ لو ٥ - ٣ لو ٧　　د) $\frac{٣^{١٥٠} \times ٥^{٢٠٠}}{٧^{٢٥٠}}$

٨) اكتشف الخطأ: قامت كل من أميرة و إسراء بحل السؤال اختصر: لو س^{٣} + لو ص^{٤} - لو س ص^{٢}

حل أميرة

المقدار = ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س ص

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ (لو س + لو ص)

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س - ٢ لو ص

= لو س + ٢ لو ص

حل إسراء

المقدار = لو $\frac{س^{٣} \times ص^{٤}}{س ص^{٢}}$ = لو س^{٢} ص^{٢}

= لو (س ص)^{٢} = ٢ لو س ص

= ٢ (لو س + لو ص)

أى الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

٩) تفكير ابداعى: بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة:

لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ... + لو (ظا ٨٩°)

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.



مقدمة الوحدة

ظهرت أولى أفكار حساب التفاضل والتكامل في أعمال الرياضي الإغريقي أرشميدس Archimedes ، الذي قام بوضع العديد من القوانين في الهندسة مثل: حجم ومساحة سطح الكرة، مستخدمًا في ذلك طرقًا كانت بداية لتلك الطرق المستخدمة في التكامل، وفي القرنين السادس عشر والسابع عشر الميلاديين شُغل العديد من علماء الرياضيات بمسائل تتطلب حساب التفاضل حتى قام كل من الإنجليزي نيوتن Newton والألماني لايبنز Leibnitz كل على حدة باكتشاف النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

والتفاضل والتكامل أو الحسبان Calculus هو أحد فروع الرياضيات التى تدرس النهايات والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الدالة وتحليلها ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث كثيرًا ما يحتاج لدراسة سلوك الدالة والتغير فيها وحل المشاكل التي يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ ما فيها من أنشطة يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف بعض الكميات غير المعنية مثل:
  $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، ...
- يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة:
  بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب في المرافق.
- يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن-1}$
- يستنتج نهاية دالة مستخدمًا القانون $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$
- يوجد نهاية دالة عند اللانهاية.
- يوجد نهايات بعض الدوال المثلثية.
- يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقدير قيمة النهاية .
- يتعرف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند نقطة يختلف حولها تعريف الدالة.
- يتعرف مفهوم اتصال الدالة:
  اتصال دالة عند نقطة – اتصال دالة على فترة – إعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة لتصبح متصلة.
- يتعرف تطبيقات (تمارين وأنشطة) متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال واتصالها.

المصطلحات الأساسية

المصطلح	Term
كمية غير معينة	Unspecified Quantity
غير معرف	Undefined
نهاية يمنى	Right Limit
نهاية يسرى	Left Limit
نهاية دالة	Limit of a Function
تعويض مباشر	Direct Substitution
دالة كثيرة الحدود	Polynomial Function
نهاية الدالة عند اللانهاية	Limit of a Function at Infinity
دالة مثلثية	Trigonometric Function
نهاية دالة مثلثية	Limit of a Trigonometric Function
اتصال دالة	Continuity of a Function

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): مقدمة فى النهايات.

الدرس (٣ - ٢): إيجاد نهاية الدالة جبريًّا.

الدرس (٣ - ٣): نهاية دالة عند اللا نهاية.

الدرس (٣ - ٤): نهايات الدوال المثلثية.

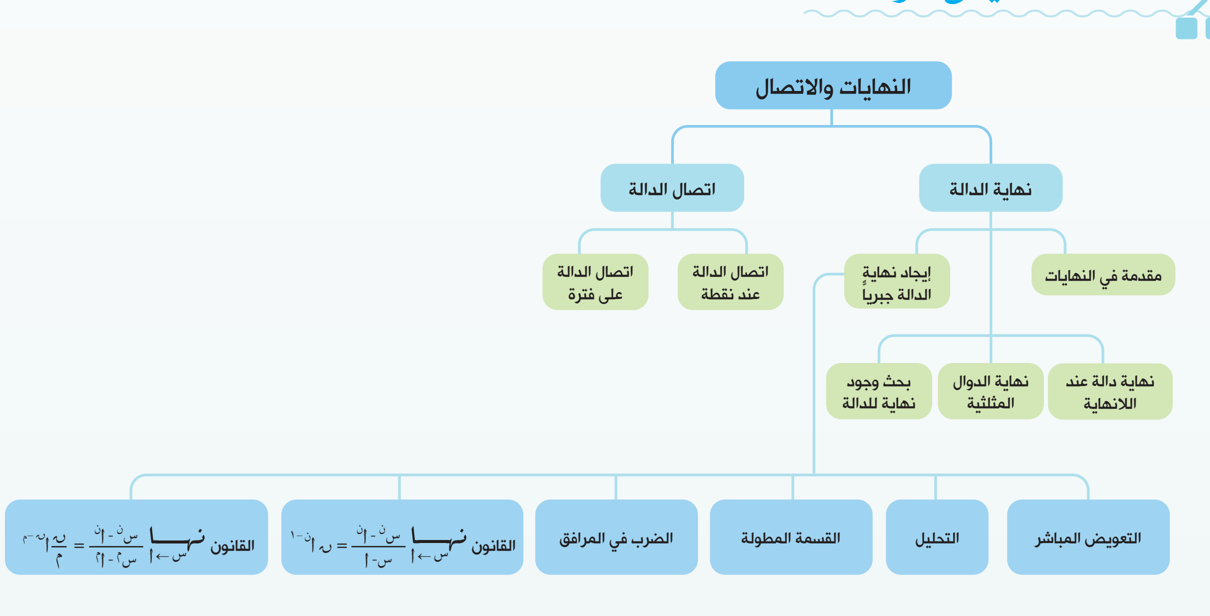
الدرس (٣ - ٥): بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.

الدرس (٣ - ٦): الاتصال.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلى - برامج رسومية

مخطط تنظيمى للوحدة



٣ - ١ مقدمة في النهايات

Introduction to Limits of Functions



سوف تتعلم
- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

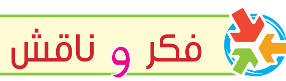
المصطلحات الأساسية
- كمية غير معينة Unspecified Quantities
- غير معرف Undefine
- مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة Extended Real Numbers
- نهاية يمنى Right Limit
- نهاية يسرى Left Limit
- قيمة دالة Value of a Function
- نهاية دالة Limit of a Function

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل. وفي هذه الوحدة سوف نتعرف على مفهوم نهاية الدالة من الناحية البيانية والجبرية. ولكن قبل ذلك دعنا نتعرف على أنواع الكميات في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تذكر أن

∞ هى رمز يدل على كمية غير محدودة أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله.



فكر و ناقش

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

(١) ٣ × ٥   (٢) ٢٨ ÷ ٤   (٣) ٤ - ٩

(٤) ٧ ÷ ٠   (٥) ٠ ÷ ٠   (٦) ∞ + ٣

(٧) ∞ ÷ ∞   (٨) ∞ - ∞

أضف إلى معلوماتك

مجموعة الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز ح

حيث ح = {-∞} ∪ ح ∪ {∞}

الكميات غير المعينة: *Unspecified Quantities*

تعلم

فى بند (فكر وناقش) نجد أن بعض نواتج العمليات محدد تمامًا مثل رقم ١ ، ٢ ، ٣ بينما بعض النواتج لايمكن تحديدها مثل باقى العمليات.

لاحظ أن: ٧ ÷ ٠ غير معرفة حيث أن القسمة على صفر لامعنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية ٠ ÷ ٠

حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضرب كل منها فى صفر كان الناتج صفرًا، لذلك فإن $\frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ - ∞ ، ٠ × ∞ (لماذا؟)

أضف إلى معلوماتك

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، - ∞ كالآتى:

لكل أ ∈ ع فإن:

١- ∞ + أ = ∞   ٢- -∞ + أ = - ∞

٣- ∞ × أ = { ∞ ، إذا كان أ > ٠ ؛ - ∞ ، إذا كان أ < ٠ }

٤- -∞ × أ = { ∞ ، إذا كان أ < ٠ ؛ - ∞ ، إذا كان أ > ٠ }

مثال

١) أوجد ناتج العمليات الآتية فى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا:

أ) ٤ + ∞ ب) ٣ - ∞ جـ) ٠ ÷ ٣ د) - ٥ ÷ ٠

هـ) ∞ + ∞ و) ٠ ÷ ٠ ز) ٥ × ∞ حـ) - ٦ × - ∞

الحل

أ) ∞ ب) - ∞ جـ) ٠ د) غير معرفة

هـ) ∞ و) كمية غير معينة ز) ∞ حـ) ∞

حاول أن تحل

١) أوجد ناتج العمليات الآتية فى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا

أ) ٠ ÷ (- ٢) ب) ٧ ÷ ٠ جـ) ٩ ÷ ∞ د) ∞ × ٠

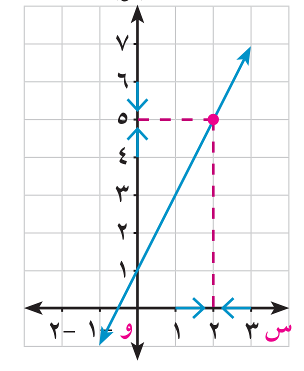
هـ) (- ٧) × ∞ و) (- ∞) + ١٢ ز) ∞ + ∞ حـ) ∞ ÷ ∞

نهاية دالة عند نقطة:

ادرس قيم الدالة د حيث د (س) = ٢س + ١ عندما تقترب س من ٢ من خلال بيانات الجدول الآتى:

س < ٢	د(س)
٢,١	٥,٢
٢,٠١	٥,٠٢
٢,٠٠١	٥,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٥,٠٠٠٢
....	....
↓	↓
س ← ٢⁺	د(٢⁺) ← ٥

س > ٢	د(س)
١,٩	٤,٨
١,٩٩	٤,٩٨
١,٩٩٩	٤,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٤,٩٩٩٨
....	....
↓	↓
س ← ٢⁻	د(٢⁻) ← ٥



نلاحظ من النشاط السابق أن:

عندما تقترب س من اليمين ومن اليسار من العدد (٢) فإن د(س) تقترب من العدد (٥)

أي أن د(٢⁺) = د(٢⁻) = ٥ ونعبر عن ذلك رياضيًا كالآتى: $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا}$ (٢ س + ١) = ٥ والتمثيل البيانى للدالة يوضح ذلك:

تعريف ١

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل ، عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوى ل وتكتب رمزيًا: $\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا}$ د(س) = ل

وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوى ل

مثال

تقدير النهاية (النهاية تساوى قيمة الدالة)

٢ قدر $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٢ - ٣ س) بيانيًّا وعدديًّا


الحل

بيانيًا: تمثل الدالة الخطية: ص = ٢ - ٣س بيانيًّا كما بالشكل المقابل:

ومن الرسم نلاحظ أن:

عندما س ← ٢ فإن د(س) ← -٤

أى أن: $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٢ - ٣ س) = -٤

عدديًا: نكون جدولاً لقيم د(س) وذلك باختيار قيم س تكون قريبة من العدد ٢ من جهة اليمين وجهة اليسار كالآتى:

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	⟵	٢	⟶	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
د(س)	-٤,٣	-٤,٠٣	-٤,٠٠٣	⟵	-٤	⟶	-٣,٩٩٧	-٣,٩٧	-٣,٧

➤ يبين الجدول أنه كلما س اقترب من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد -٤

حاول أن تحل

٢ قدر نهاية كل ممايأتى بيانيًّا وعدديًّا.

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (١ - ٣س)

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (س^2 -٢)

مثال

تقدير النهاية (النهاية لاتساوى قيمة الدالة)

٣ قدر $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 - ٤}{\text{س} - ٢}$ بيانيًّا وعدديًّا.


الحل

بيانيًّا: يبين الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة د حيث: د(س) = $\frac{\text{س}^2 - ٤}{\text{س} - ٢}$

حيث س ≠ ٢.

ونلاحظ من الشكل أنه عندما س ← ٢ فإن قيمة د(س) ← ٤

لذلك فإن: $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 - ٤}{\text{س} - ٢} = ٤$


عدديًّا: نكون جدولاً لقيم د(س) ، وذلك باختيار قيم س القريبة من العدد ٢

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	⟵	٢	⟶	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
د(س)	٤،١	٤,٠١	٤,٠٠١	⟵	٤	⟶	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩

➤ يبين الجدول أنه كلما اقتربت س من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد ٤.

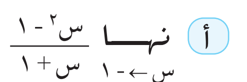
لاحظ من هذا المثال أن:

١) الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين $\frac{٠}{٠}$ عندما س = ٢

٢) وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ ٢ لاتعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٢ حيث إن س ∈ ع - {٢}
وهذه الملاحظة توضح مفهومًا مهما فى النهايات.

٩ حاول أن تحل

٣) قدر نهاية كل مماياتى بيانيًّا وعدديًّا:



أ) $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$



ب) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س - ٣}$

نشاط

استخدام التكنولوجيا في إيجاد نهاية دالة عند نقطة (الحاسبة البيانية)

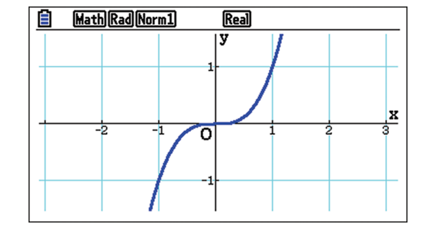
استخدم الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة د، **ثم قدر نهاية الدالة عند النقطة المبينة:**

١) د(س) = $س^٣$ عند س ⟵ صفر

٢) د(س) = $(\frac{س^٣ - ١}{س - ١})$ - ٢ عند س ⟵ ١

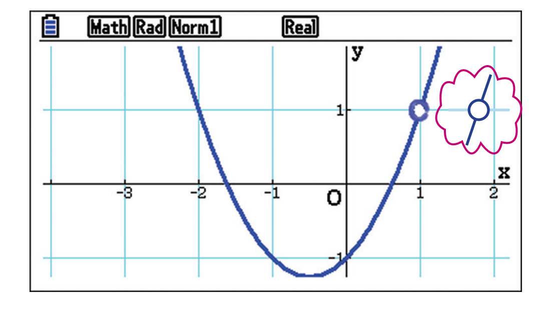
٣) د(س) = $\frac{جا س}{س}$ عند س ⟵ صفر

يمكن استخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية مثل (*Geogebra*) **في الحاسب الآلى أو فى التابلت لرسم منحنى الدالة كالآتى:**



١) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالةد حيث: د(س) = $س^٣$

من الرسم $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = صفر

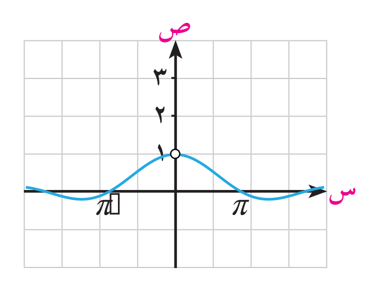


٢) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث

د(س) = $(\frac{س^٣ - ١}{س - ١})$ - ٢

من الرسم $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ١

(لاحظ الفجوة عند النقطة (١ ، ١)



٣) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = $\frac{جا س}{س}$

من الرسم نجد أن $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = ١$



نستنتج من النشاط السابق أن:

إن وجود نهاية الدالة عندما س ⟵ أ لا يعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ

تفكير ناقد: إذا كانت الدالة د معرفة عند س = أ فهل هذا يعني وجود النهاية عند أ فسر إجابتك.

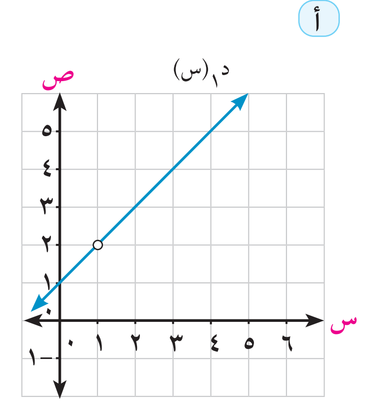
تدريب على النشاط: باستخدام الحاسبة البيانية أو بأحد البرامج الرسومية للحاسوب أو التابلت قدر كلًّا مما يأتي:

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} (٢ - س^٢)$ ب $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{س^٣ + ٨}{س + ٢}$ ج $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{جا ٣س}{س}$

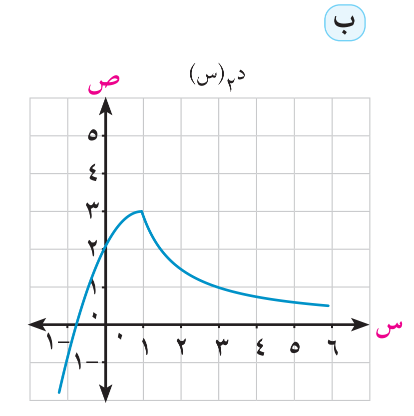


① قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند س ⟵ ١

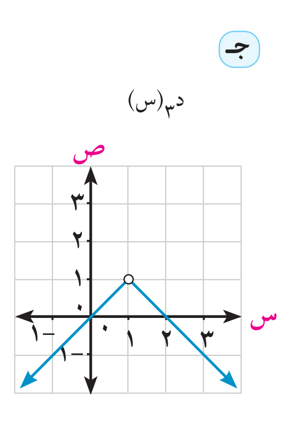
أ



ب

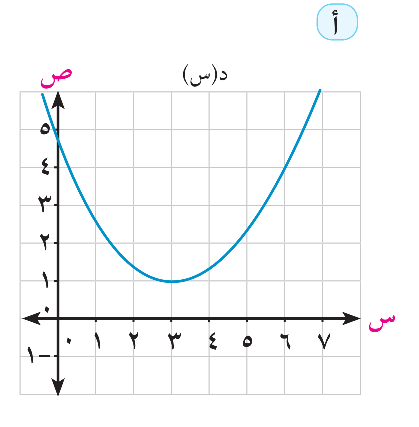


ج



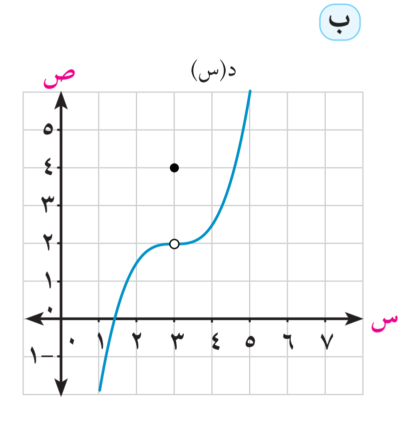
② قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:

أ



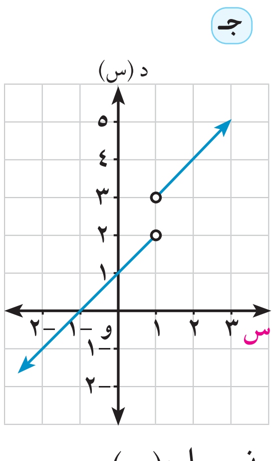
$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ د(س) = ...

ب



$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ د(س) = ...

ج



$\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د(س) = ...

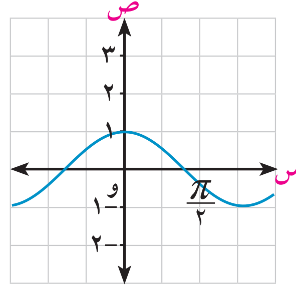


③ من الرسم البياني أوجد:

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ د(س)



ب د(٠)



④ من الرسم البيانى المقابل أوجد

أ) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ د(س)

ب) د(٣)

⑤ من الرسم البيانى المقابل أوجد:

أ) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}}$ د(س)

ب) د(-٢)

جـ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

د) د(٠)

⑥ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (٢ - $س^٢$)

ب) د(٠)

د(س) = ٢ − $س^٢$

⑦ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

ب) د(-٢)

د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

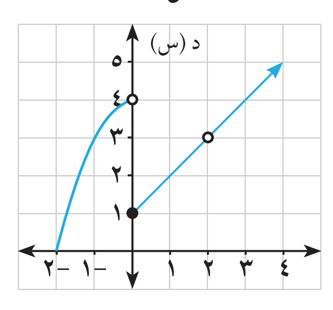
⑧ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ) د(٠)

ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

جـ) د(٢)

د) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د(س)



⑨ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د(س) حيث د(س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	⟵	٢	⟶	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

⑩ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}}$ (٣ س + ١)

س	- ٠,٩	- ٠,٩٩	- ٠,٩٩٩	⟵	- ١	⟶	- ١,٠٠١	- ١,٠١	- ١,١
د(س)					؟				

⑪ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$

س	- ٠,٩	- ٠,٩٩	- ٠,٩٩٩	⟵	- ١	⟶	- ١,٠٠١	- ١,٠١	- ١,١
د(س)					؟				

⑫ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	⟵	٢	⟶	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

⑬ باستخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية قدر نهاية كل ممايأتى ثم حقق إجابتك باستخدام القيم الإرشادية.

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٣س - ٤)

ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ (س^٢ - ٤)

جـ) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ + ١}{س + ١}$

د) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ + ٨}{س^٢ - ٢}$

هـ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (س + جا س)

و) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{جا س - س}{س}$

ز) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^٢}$

ح) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{|س|}$

٣ - ٢ إيجاد نهاية الدالة جبريًّا

Finding the Limit of a Function Algebraically

تعلمت كيفية تعيين نهاية دالة عند س = أ بيانيًّا أو عدديًّا عن طريق دراسة قيم الدالة بالقرب من س = أ وفيما يلي بعض النظريات والنتائج التي تساعد في إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البياني أو دراسة قيم الدالة.

نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب الرسومية فى رسم الشكل البيانى لكل من الدالتين:

$$د_١(س) = \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢} \quad ، \quad د_٢(س) = س + ١$$

ماذا تلاحظ؟

أوجد: $\lim_{س \to ٢} د_١(س)$ ، $\lim_{س \to ٢} د_٢(س)$

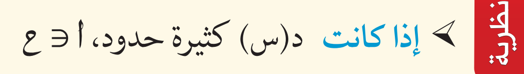
ماذا تستنتج؟



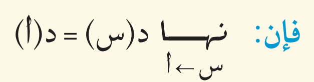
تعلم

نهاية الدالة كثيرة الحدود *Limit of a Polynomial Function*

نظرية



إذا كانت د(س) كثيرة حدود، أ ∈ ح



فإن: $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

مثال

التعويض المباشر

١ أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

أ $\lim_{س \to ٢} (س^٢ - ٣س + ٥)$

ب $\lim_{س \to ٣} (-٤)$

الحل

أ $\lim_{س \to ٢} (س^٢ - ٣س + ٥)$

$= ٤ - ٦ + ٥ = ٣$ (بالتعويض المباشر)

ب $\lim_{س \to ٣} (-٤) = -٤$

لاحظ أن د(س) = -٤ ثابتة لكل قيم س ∈ ح

تذكر أن

تسمى الدالة د كثيرة حدود إذا كانت على الصورة

$د(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... + أ_ن س^ن$

حيث: ن ∈ ط ، $أ_ن \neq$ صفر،

$أ_٠ ، أ_١ ، ... أ_ن \in ح$

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة فى إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن - ١}$$

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = \frac{ن}{م} أ^{ن - م}$$

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة Limit of a Function
- دالة كثيرة الحدود Polynomial Function
- تعويض مباشر Direct Substitution
- تحليل Factorization
- قسمة تركيبية Synthetic Division
- المرافق Conjugate

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

حاول أن تحل

(١) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٣} (٢س - ٥)$ ب) $\lim_{س \to -٢} (٣س^٢ + س - ٤)$ جـ) $\lim_{س \to -٢} (٧)$

نظرية ٢

إذا كان $\lim_{س \to أ} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} ى(س) = م$

فإن:

١) $\lim_{س \to أ} ك\, د(س) = ك.ل$ حيث $ك \in ح$

٢) $\lim_{س \to أ} [د(س) \pm ى(س)] = ل \pm م$

٣) $\lim_{س \to أ} د(س). ى(س) = ل.م$

٤) $\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{ى(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط $م \neq ٠$

٥) $\lim_{س \to أ} (د(س))^ن = ل^ن$ حيث $ل^ن \in ح$

مثال

استخدام النظرية

(٢) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to -١} \frac{٣س + ٧}{س^٢ + ٢س - ٥}$ ب) $\lim_{س \to -٢} (\sqrt{٤س^٢ - ٣})$

الحل

أ) $\lim_{س \to -١} \frac{٣س + ٧}{س^٢ + ٢س - ٥} = \frac{\lim_{س \to -١}(٣س + ٧)}{\lim_{س \to -١}(س^٢ + ٢س - ٥)} = \frac{٣ \times -١ + ٧}{(-١)^٢ + ٢(-١) - ٥} = \frac{٤}{-٦} = \frac{-٢}{٣}$

ب) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{٤س^٢ - ٣} = \sqrt{\lim_{س \to -٢}(٤س^٢ - ٣)} = \sqrt{٤(-٢)^٢ - ٣} = \sqrt{١٦ - ٣} = \sqrt{١٣}$

حاول أن تحل

(٢) احسب النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٣}{٢س + ١}$ ب) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{٢س^٢ + ١}$

إيجاد نهاية الدالة عند حالات عدم التعيين

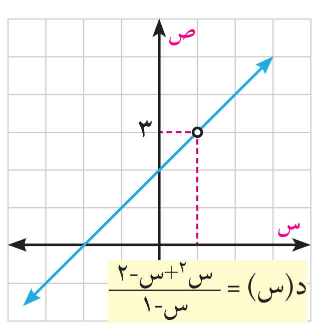
لا يمكن إيجاد $\lim_{س \to ١} د(س)$ حيث $د(س) = \frac{س^٢ + س - ٢}{س - ١}$ باستخدام التعويض المباشر

حيث نصل إلى إحدى حالات عدم التعين $\frac{صفر}{صفر}$ ، ويبين الشكل المقابل

التمثيل البياني للدالة د حيث نجد أن $\lim_{س \to ١} د(س) = ٣$

وبعد تبسيط الدالة د واختصار العوامل المتشابهة غير الصفرية نصل للدالة

$ى(س) = س + ٢$ حيث $ى(س) = د(س)$ لجميع قيم $س \in ح - \{١\}$.



نظرية ٣

إذا كانت د(س) = ى(س) لكل س ∈ ع - {أ}

وكانت $\lim_{س \to أ}$ ى(س) = ل فإن $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل

مثال

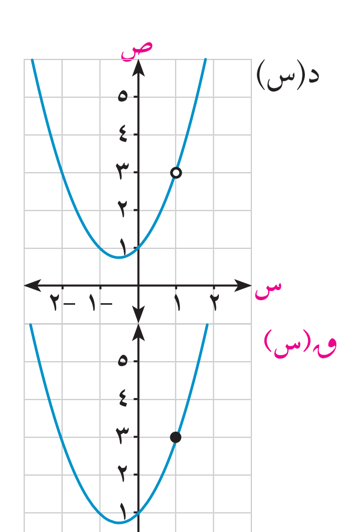
استخدام التحليل

٣ استخدم التحليل لإيجاد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ ب $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س^٢ + ١}{س^٢ + س - ٢}$

الحل





أ نلاحظ أن د(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ غير معينة عند س = ١

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفرية فإنه يمكن كتابة د(س) على الصورة.

د(س) = $\frac{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{(س - ١)}$ = $س^٢$ + س + ١ = ى(س)

من ذلك نجد إن د(س) = ى(س) لكل س ≠ ١

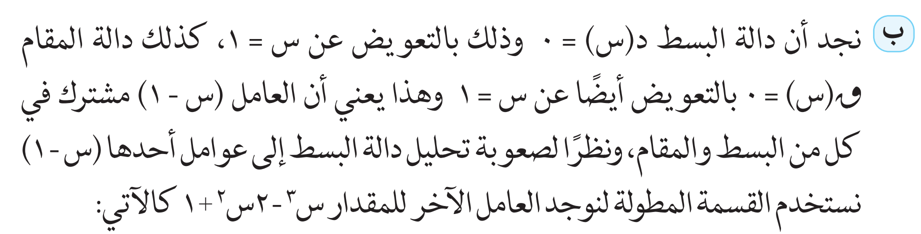
وحيث أن $\lim_{س \to ١}$ ى(س) = ٣

فإنه طبقًا للنظرية ٣ نستنتج أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٣

∴ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ = ٣

طريقة القسمة المطولة

ب نجد أن دالة البسط د(س) = ٠ وذلك بالتعويض عن س = ١، كذلك دالة المقام ى(س) = ٠ بالتعويض أيضًا عن س = ١ وهذا يعني أن العامل (س - ١) مشترك في كل من البسط والمقام، ونظرًا لصعوبة تحليل دالة البسط إلى عوامل أحدها (س - ١) نستخدم القسمة المطولة لنوجد العامل الآخر للمقدار $س^٣ - ٢س^٢ + ١$ كالآتي:



$س^٣ - ٢س^٢ \quad + ١$	س - ١
$- س^٣ - س^٢$	$س^٢ - س - ١$
$٠ \quad - س^٢ \quad + ١$	
$- س^٢ + س$	
$٠ \quad - س + ١$	
$- س + ١$	
صفر	

ارشاد للحل

فى عملية القسمة المطولة
(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا بنفس الطريقة.
(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.
(٣) نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه ويطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقى.
(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء عملية القسمة

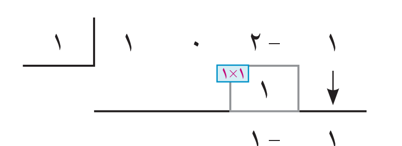
تسمى طريقة القسمة التركيبية

نستخدم فى هذه الطريقة معاملات كثيرات الحدود كما يلى:

خطوة ١: نكتب معاملات المقسوم مرتبه تنازليًّا وتساوى المقسوم عليه بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل:

المعاملات	+ ١	-٢	٠	١	١ قيمة س

خطوة ٢: اترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول في قيمة س واكتب الناتج أسفل المعامل الثانى ثم اجمع.



خطوة ٣: كرر عمليتى الضرب والجمع.

١	-٢	٠	١	١
	١	-١	-١	
١	-١	-١	٠	

نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١ ، -١ ، -١ على الترتيب لذلك، فإن خارج القسمة هو $س^{٢} - س - ١$

أى أن: $س^{٣} - ٢س^{٢} + ١ = (س - ١)\ (س^{٢} - س - ١)$

لذلك فإن: $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{(س - ١)\ (س^{٢} - س - ١)}{(س - ١)\ (س + ٢)} = \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{٢} - س - ١}{س + ٢} = -\dfrac{١}{٣}$

حاول أن تحل

٣ أوجد:

أ $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{س^{٣} + ٨}{س + ٢}$

ب $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{٢س - ٨}{س^{٢} - س - ١٢}$

جـ $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٣} - س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢}$

د $\lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{س^{٣} - ١٠س - ٣}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

مثال — استخدام المرافق *Conjugate*

٤ أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤}$

ب $\lim\limits_{س \to ٥} \dfrac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$

الحل

أ لاحظ أن: $د(س) = \dfrac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤}$ غير معينة عند س = ٤

لذلك نبحث عن طرق نتخلص بها من العامل (س - ٤)، من كل من البسط و المقام.

$$\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤} \times \dfrac{\sqrt{س - ٣} + ١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س - ٣ - ١}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{(س - ٤)}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \dfrac{١}{٢}$$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٣} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣}{\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣}$

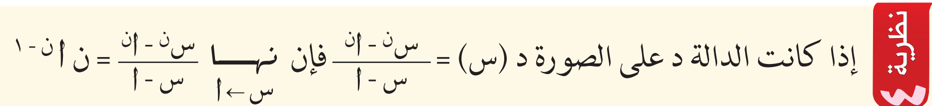
$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}(\text{س} - ٥)\,(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣)}{\text{س} + ٤ - ٩} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}(\text{س} - ٥)(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣)}{(\text{س} - ٥)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \text{س}(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣) = ٥\,(٣ + ٣) = ٣٠$

حاول أن تحل

٤ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{س} - ١} - ٢}{\text{س} - ٥}$ ب $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٥} - ٢}$

نظرية ٤ إذا كانت الدالة د على الصورة د (س) = $\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$ فإن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن} - ١}$

نشاط

استعن بمعلمك للبحث فى الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) عن طرق برهان النظرية (٤).





مثال

إيجاد نهاية دالة عند نقطة باستخدام نظرية (٤)



٥ أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٤ - ٨١}{\text{س} - ٣}$

الحل

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٤ - ٣^٤}{\text{س} - ٣} = ٤(٣)^٣ = ١٠٨$



نتائج على النظرية:

١- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن} - ١}$

٢- $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن} - \text{م}}$

مثال

٦ أوجد:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + ٥)^٤ - ٦٢٥}{\text{س}}$ ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س}^٢ - ٤}$

ج $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - ٤)^٥ + ٣٢}{\text{س} - ٢}$ د $\underset{\text{س} \leftarrow ١٦}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt[٤]{\text{س}^٥} - ٣٢}{\sqrt{\text{س}^٣} - ٦٤}$

الحل

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(\text{س}+5)^4 - 5^4}{\text{س}} = 4 \times 5^3 = 500$

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^5 - 2^5}{\text{س}^2 - 2^2} = \dfrac{5}{2} \times 2^3 = 20$

ج) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{(\text{س}-4)^5 + 32}{\text{س} - 2} = \lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{(\text{س}-4)^5 - (-2)^5}{(\text{س}-4) - (-2)}$

$= 5(-2)^4 = 80$

د) $\lim\limits_{\text{س} \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{\text{س}^5} - 32}{\sqrt{\text{س}^3} - 64} = \lim\limits_{\text{س} \to 16} \dfrac{\text{س}^{\frac{5}{4}} - (16)^{\frac{5}{4}}}{\text{س}^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}}}$

$= \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} \times (16^{\frac{5}{4} - \frac{3}{2}}) = \dfrac{5}{6} \times 16^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{12}$

لاحظ أن

$16^{\frac{5}{4}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^{4 \times \frac{5}{4}}$

$= 2^5 = 32$

كذلك فإن:

$16^{\frac{3}{2}} = 64$

حاول أن تحل

5) أوجد:

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to -5} \dfrac{\text{س}^4 - 625}{\text{س} + 5}$

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{\text{س}^7} - 128}{\text{س} - 16}$

ج) $\lim\limits_{\text{س} \to 7} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س} + 25} - 2}{\text{س} - 7}$

تفكير إبداعي:

إذا كان $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^{ن} - 64}{\text{س} - 2} = ل$ **فما قيمة:** ن ، ل

تمارين ٣ – ٢

أكمل ما يأتي:

1) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} (3\text{س} - 1) =$ ....

2) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س} - 3}{\text{س} + 1} =$ ....

3) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س}} =$ ....

4) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2} =$ ....

5) $\lim\limits_{\text{س} \to أ} \dfrac{\text{س}^5 - أ^5}{\text{س} - أ} =$ ....

6) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{2}}{\text{س} - 2} =$ ....

7) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\frac{1}{\text{س}^3} - 1}{\text{س}^4 - 1} =$ ....

8) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^{-1} - 2^{-1}}{\text{س}^{-3} - 2^{-3}} =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

9) $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{\text{س}^3 - 1}{\text{س} + 1}$ تساوى


أ) −3


ب) −2

ج) 3

د) ليس للدالة نهاية

(١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ تساوي

أ) ١ ب) $\frac{\pi}{٢}$ ج) $\frac{٢}{\pi}$ د) ليس للدالة نهاية

(١١) $\lim\limits_{\text{س} \to ١٦} \frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١٦}$ تساوي:

أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ ج) ١ د) ليس للدالة نهاية

(١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$ تساوي

أ) ٠ ب) ١ ج) $\frac{٤}{\pi}$ د) ليس للدالة نهاية

(١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٥} - ٢٤٣}{\text{س}^{٣} - ٢٧}$ تساوي

أ) ٠ ب) $\frac{٥}{٣}$ ج) ١٥ د) ٩

(١٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{ا}}{\text{س} - ٢}$ لها وجود فإن ا تساوي:

أ) ١- ب) ١ ج) ٢ د) ٤

(١٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{٥}{(\text{س} - ٢)^{٣}}$ تساوي:

أ) $-\frac{٥}{٢}$ ب) صفر ج) ٥ د) ليس للدالة نهاية

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)

(١٦) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢)$

(١٧) $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} - ٣}$

(١٨) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} (٢\text{س} - \text{جا س})$

(١٩) $\lim\limits_{\text{س} \to \pi} \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{س}}$

(٢٠) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} + ١}$

(٢١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٩} \frac{٩ - \text{س}}{\text{س}^{٢} - ٨١}$

(٢٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٠}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$

(٢٣) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}$

(٢٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٩} \frac{\text{س} + \sqrt{\text{س}} - ١٢}{\text{س} - ٩}$

(٢٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{١}{٢ + \text{س}} - \frac{١}{٢}}{\text{س}}$

(٢٦) $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٤} - ١٦}$

(٢٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ١}\right)$

(٢٨) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٤}{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}}$

(٢٩) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} - \text{س} + ٤}{٢\text{س}^{٢} - ٧\text{س} - ٤}$

(٣٠) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥}$

(٣١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س} - ٢}$

(٣٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{-٨} - (١٦)^{-٢}}{\text{س} - ٢}$

(٣٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\sqrt[٧]{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$

(٣٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{-٩} - \frac{١}{٥١٢}}{\text{س} - ٢}$

(٣٥) $\lim\limits_{\text{س} \to \sqrt{٥}} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\text{س}^{٤} - \sqrt{٢٥}}$

(٣٦) $\lim\limits_{\text{س} \to ٨١} \frac{\sqrt[٤]{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٨١}$

٣٧ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٥} - ٣٢}$

٣٨ $\underset{س \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

٣٩ $\underset{س \leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$

٤٠ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$

٤١ $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{٥١ هـ}$

٤٢ $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} - ٨١}{س^{٥} + ٢٤٣}$

٤٣ $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦ هـ}$

٤٤ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} + ٨} - ٣}{س + ١}$

٤٥ $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س + ٧} - ٢}{س + ٣}$

٤٦ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{س + ٦} - ٣}$

٤٧ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - س - ٢}{س + ١}$

٤٨ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢س - ١)^{٢} - ١}{٥س}$

٤٩ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{س - ١} - \dfrac{٣}{س^{٣} - ١}\right)$

٥٠ $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ٤س + ٤}{س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢}$

٥١ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢س + ١} - ٣}{س - ٤}$



نشاط

٥٢ الربط بالحجم صنعت علبة مفتوحة من أعلى من ورق مقوى على شكل مربع طول ضلعه ٢٤سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة. طول ضلع كل منها س سم.

أولًا: ارسم شكلًا توضيحيًا للعلبة.　　**ثانيًا:** أثبت أن حجم العلبة يعطى بالعلاقة $ع = س(٢٤ - ٢س)^{٢}$

ثالثًا: أوجد حجم العلبة عندما $س = ٤$ وذلك بدراسة قيم الدالة عندما $س \leftarrow ٤$ مستخدمًا الجدول التالي:

س	٣	٣,٥	٣,٩	←	٤	→	٤,١	٤,٥	٥
ع	....	....	....	←	....	→	....	....	....

رابعًا: استخدم أحد البرامج الرسومية لرسم العلاقة والتحقق من أن القيمة العظمى للحجم توجد عند $س = ٤$

تفكير إبداعي:

٥٣ إذا كان $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ **فأوجد:** $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} د(س)$

٥٤ إذا كان $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{د(س)}{س^{٢}} = ٥$ **فأوجد:**

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} د(س)$　　ب $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{د(س)}{س}$

٥٥ الربط بالتجارة: وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة $د(س) = ٠,٢ س^{٢} + ٤٠ س + ١٥٠$. أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه.

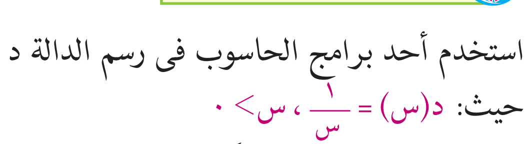


٣ - ٣ نهاية دالة عند اللانهاية

Limit of a Function at Infinity

نحتاج فى كثير من التطبيقات العملية والحياتية إلى معرفة سلوك الدالة د(س) عندما س ⟵ ∞ والنشاط التالى يوضح ذلك.

نشاط



استخدم أحد برامج الحاسوب فى رسم الدالة د حيث: $د(س) = \frac{١}{س}$ ، س > ٠

ماذا تلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم س الموجبة حتى تقترب من ما لانهاية؟

من الشكل المرسوم **نلاحظ أن:**

- كلما زادت قيم س واقتربت من ما لا نهاية اقتربت قيم د(س) من عدد محدد.

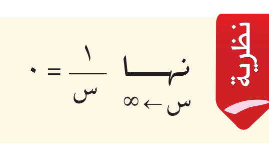
أكمل الجدول التالى لإيجاد العدد الذى تقترب منه د(س)

س	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	س ⟵ ∞
د(س)	٠,١	٠,٠١				س ⟵ ؟

تعلم

نهاية دالة عند اللانهاية *Limit of a Function at Infinity*

من النشاط السابق نجد أنه كلما اقتربت س من ما لانهاية اقتربت قيم د(س) من الصفر.



نظرية: $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} = ٠$

نتيجة: $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^ن} = ٠$ {حيث ن ∈ ع$^+$ ، أ ثابت}

قواعد أساسية:

- $\lim_{س \to \infty} جـ = جـ$ ، حيث جـ ثابت
- إذا كان ن عددًا موجبًا فإن $\lim_{س \to \infty} س^ن = \infty$

لاحظ أن: نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س ⟵ أ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما نضع س ⟵ ∞ بدلًا من س ⟵ أ

سوف تتعلم

- نهاية دالة عند اللانهاية.
- إيجاد نهاية دالة عند اللانهاية باستخدام الحل الجبرى.
- إيجاد نهاية دالة عند اللانهاية باستخدام الحل البيانى.

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة عند اللانهاية.
  Limit of a Function at Infinity

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مثال

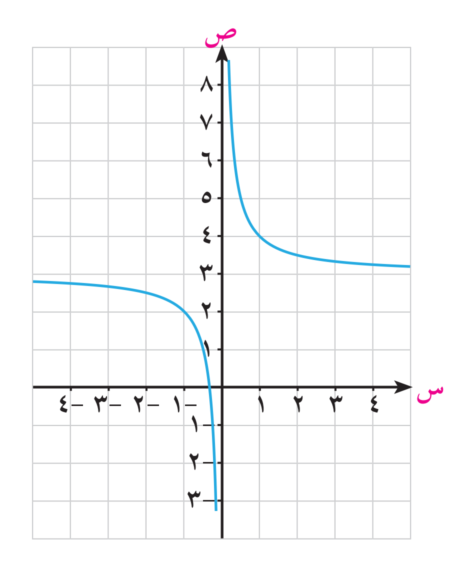
① أوجد:

أ) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{1}{\text{س}}+3\right)$ ب) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(4-\frac{3}{\text{س}^2}\right)$

➢ ثم تحقق من ذلك بيانيًا باستخدام أحد البرامج الرسومية.



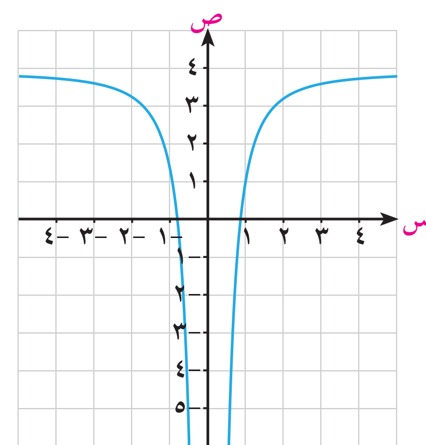
الحل



أ) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{1}{\text{س}}+3\right)=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{1}{\text{س}}+\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}3$

$=0+3=3$

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{1}{\text{س}}+3\right)=3$



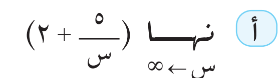
ب) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(4-\frac{3}{\text{س}^2}\right)=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}4-\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{3}{\text{س}^2}$

$=4-3\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{1}{\text{س}^2}=4-3\times 0=4$

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(4-\frac{3}{\text{س}^2}\right)=4$

حاول أن تحل

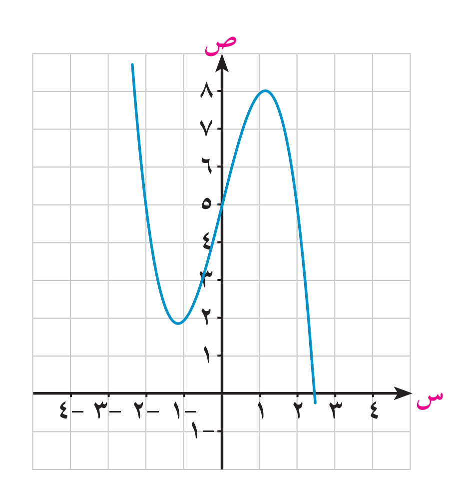
① أوجد:



أ) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{5}{\text{س}}+2\right)$ ب) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{2}{\text{س}^2}+5\right)$

مثال

② أوجد: $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(4\text{س}-\text{س}^3+5\right)$



الحل

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\text{س}^3\left(\frac{4}{\text{س}^2}-1+\frac{5}{\text{س}^3}\right)$

$=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\text{س}^3\times\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{4}{\text{س}^2}-1+\frac{5}{\text{س}^3}\right)$

$=\infty\times -1=-\infty$

حاول أن تحل

٢ أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ (س^{٣} + ٧س^{٢} + ٢)$ ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ (٤ - ٣س - س^{٣})$

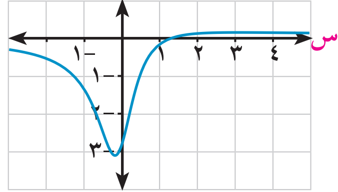
مثال

٣ أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

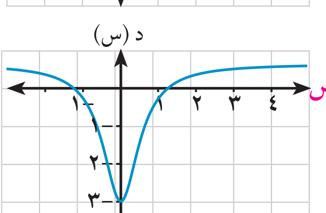
أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٢س - ٣}{٣س^{٢} + ١}$ ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٢س^{٢} - ٣}{٣س^{٢} + ١}$ ج $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٢س^{٣} - ٣}{٣س^{٢} + ١}$

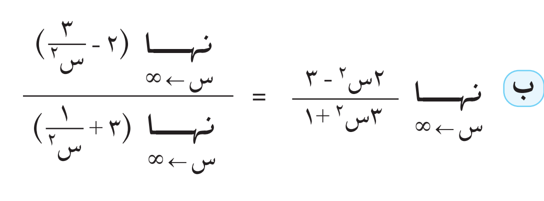
الحل

فى كل الحالات يقسم كل من البسط والمقام على س^{٢} (أعلى قوة للمتغير س فى المقام).



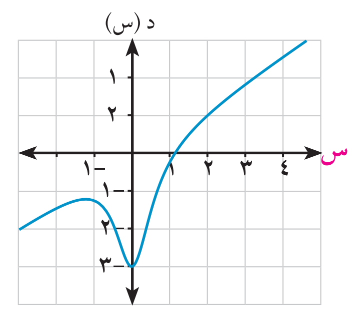
أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٢س - ٣}{٣س^{٢} + ١} = \frac{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٣}{س^{٢}}\right)}{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ + \frac{١}{س^{٢}}\right)} = \frac{٠ - ٠}{٣ + ٠} = ٠$





ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٢س^{٢} - ٣}{٣س^{٢} + ١} = \frac{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٢ - \frac{٣}{س^{٢}}\right)}{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ + \frac{١}{س^{٢}}\right)}$

$= \frac{٢ - ٠}{٣ + ٠} = \frac{٢}{٣}$



ج $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٢س^{٣} - ٣}{٣س^{٢} + ١} = \frac{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٢س - \frac{٣}{س^{٢}}\right)}{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ + \frac{١}{س^{٢}}\right)}$

$= \frac{\infty - ٠}{٣ + ٠} = \infty$

نستنتج من هذا المثال أن: عند إيجاد $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.
- النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط $<$ درجة المقام.
- النهاية تعطى $\pm \infty$ إذا كانت درجة البسط $>$ درجة المقام.
- يستخدم هذا الاستنتاج فقط للتحقق من حلول المسائل باستخدام النظرية والنتيجة ولاتعتبر طريقة حل.

حاول أن تحل

٣ أوجد:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٥س^{٢} - ٣س + ١}{٢س}$ ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٤س^{٣} - ٥س}{٨س^{٤} + ٣س^{٢} - ٢}$ ج $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \ \frac{-٦س^{٢} + ١}{٣س^{٢} + س - ٢}$

مثال

④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

ب $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(س - \sqrt{س^{٢} + ٤} \right)$

الحل

أ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

$\because$ س $\longleftarrow \infty$

$\therefore$ س $>$ ٠ أي أن $|س| =$ س

$\therefore \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٢}{س^{٣} + ١}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٣}$

$= \dfrac{\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ - \dfrac{٢}{س^{٣}}\right)}{\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \dfrac{١}{س^{٣}}\right)} = \dfrac{١ - ٠}{١ + ٠} = ١$

د(س) $= \dfrac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

ب $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(س - \sqrt{س^{٢} + ٤} \right)$

$= \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(س - \sqrt{س^{٢} + ٤}\right)}{١} \times \dfrac{\left(س + \sqrt{س^{٢} + ٤}\right)}{\left(س + \sqrt{س^{٢} + ٤}\right)}$

$= \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - س^{٢} - ٤}{س + \sqrt{س^{٢} + ٤}}$

$= \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٤}{س + \sqrt{س^{٢} + ٤}}$

$\because$ س $\longleftarrow \infty$

$\therefore$ س $>$ ٠ أي أن: $\sqrt{س^{٢}} = |س| =$ س بقسمة كل من البسط والمقام على س $= \sqrt{س^{٢}}$

$\therefore \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٤}{س + \sqrt{س^{٢} + ٤}} = \dfrac{\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} - \dfrac{٤}{س}}{\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \sqrt{١ + \dfrac{٤}{س^{٢}}}\right)} = \dfrac{٠}{١ + ١} = ٠$

د(س) $=$ س $- \sqrt{س^{٢} + ٤}$

حاول أن تحل

④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س - ٣}{\sqrt{٤س^{٢} + ٢٥}}$

ب $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٣س^{٢} + ٥س} - \sqrt{٣}\ س \right)$



تمارين الدرس ٣ – ٣

أكمل ما يأتي:

١) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{٣}{س}) =$ ....

٢) $\lim_{س \to \infty} (\frac{٣}{س^٢} - ٢) =$ ....

٣) $\lim_{س \to \infty} (-٧) =$ ....

٤) $\lim_{س \to \infty} (س^٢ - ٣) =$ ....

٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س + ١}{س}$ ....

٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٣ - ٥}{س^٢ + ١} =$ ....

٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٥ + ٣}{س^٣ - ٥} =$ ....

٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س}{\sqrt{س^٢ - ١}} =$ ....

٩) $\lim_{س \to \infty} (٣ - \frac{٧}{س} + \frac{٤}{س^٢}) =$ ....

١٠) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{س^٢ + ١} - س) =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٦س}{٢س + ٣}$ تساوي

أ) صفر ب) ٢ جـ) ٣ د) ∞

١٢) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٤}{س} + ١}$

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ∞

١٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س + ٣}{٢ - س^٢}$

أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) ∞

١٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ + ١}{٢س - ١}$

أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) ١ د) ∞

١٥) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{١ + س}{٤س - ١}}$

أ) -١ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

أوجد:

١٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^٢}$

١٧) $\lim_{س \to \infty} (س^٣ + ٥س^٢ + ١)$

١٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ - ٧س}{٢ + ٣س}$

١٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢}{س + ٣}$

٢٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^٢}{س^٢ + ٣}$

٢١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - ٦س - ٣س^٢}{٢س^٢ + س + ٤}$

(٢٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س - ١}{س^{٢} + ٤س + ١}$

(٢٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٢}{٣س^{٢} + ٤س - ١}$

(٢٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٢} - ١}{٤س^{٣} - ٥س - ١}$

(٢٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٢} - ٦}{(س - ١)^{٢}}$

(٢٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٧ + \dfrac{٢س^{٢}}{(س + ٣)^{٢}}\right)$

(٢٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{٣س^{٢}} - \dfrac{٥س}{٢ + س}\right)$

(٢٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{س}{٢س + ١} + \dfrac{٣س^{٢}}{(س - ٣)^{٢}}\right)$

(٢٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-س}{\sqrt{٤ + س^{٢}}}$

(٣٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٤س + ٥}{(٢س - ١)^{٣}}$

(٣١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٤س^{٢} - ٢س + ١} - ٢س\right)$

(٣٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٥س^{٢} + ٤س + ٧} - \sqrt{٥س^{٢} + س + ٣}\right)$

(٣٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س \left(\sqrt{٤س^{٢} + ١} - ٢س\right)$

(٣٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + س - ١}{٨س^{٢} - ٣}$

(٣٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - ٣س^{٣}}{\sqrt{س^{٦} + ٩}}$

(٣٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٢)^{٣}(٣ - ٢س^{٢})}{٣س(س^{٢} + ٧)^{٢}}$

(٣٧) إذا كان $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{أس^{٢} + ٣ب س + ٥} - ٢س\right) = ٣$ فما قيمة كل من أ، ب.

(٣٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{-١} + ٣س^{-٢} + ٥}{٢س^{-٢} - س^{-٣} + ١}$

(٣٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{-١} - ٣س^{-٢} + س^{-٣}}{٤س^{-٣} + س^{-١}}$

(٤٠) **تفكير إبداعي**

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قدرها ٥٠٠٠ جنيه وتكلفة الكارت نصف جنيه، فكانت التكلفة الإجمالية $جـ = \frac{١}{٢}س + ٥٠٠٠$ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

أوجد:

(١) تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

(أ) ١٠٠٠٠ كارت　　(ب) ١٠٠٠٠٠ كارت

(٢) أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لا نهائيًّا من الكروت.

٣ - ٤ نهايات الدوال المثلثية

Limits of Trigonometric Functions

نشاط

اذا كانت د دالة حيث د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ والمطلوب دراسة قيم الدالة د عندما س ← ٠ حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائري

كون جدولًا لدراسة سلوك الدالة د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ عندما تقترب س من الصفر مستخدمًا التقدير الدائرى

س	١	٠,١	٠,٠١	←	٠	→	٠,٠١-	٠,١-	١-
$\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$	٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٩٩٨	←	....	→	....	٠,٩٩٨٣	٠,٨٤١٥

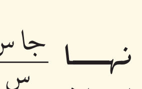
من الجدول السابق استنتج $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$



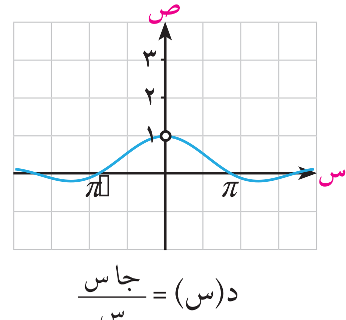
تعلم

نظرية ١

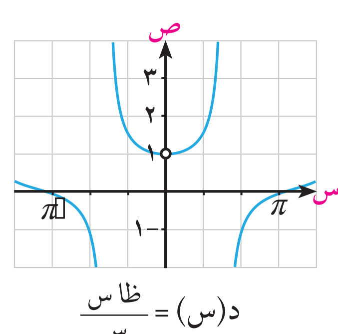
إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى فإن:

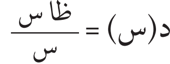


$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ ، $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$



د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$





د(س) = $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$

تعبير شفهي

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستيني فهل يمكن إيجاد $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ فسر إجابتك.

نتيجة: $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا أ س}}{\text{س}} = \text{أ}$ ، $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا أ س}}{\text{س}} = \text{أ}$

سوف تتعلم

- نهايات بعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

- دالة مثلثية Trigonometric Function
- نهاية دالة مثلثية Limit of a Trigonometric Function

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

مثال

(١) أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{جا ٣س}{س} = ٣$

ب $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{ظا ٢س}{٧ س} = \frac{١}{٧} \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{ظا ٢س}{س} = \frac{٢}{٧}$

جـ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{جا ٥ س جتا ٢ س}{س} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{جا ٥س}{س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} جتا ٢ س = ٥ \times ١ = ٥$

حاول أن تحل

(١) أوجد:

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{جا ٢س}{٣س}$ ب $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{ظا ٤س}{٥ س}$ جـ $\underset{س \leftarrow ١}{نهــا} \frac{جا \pi س}{١ - س}$

نتيجة ٢

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - جتاس}{س} = صفر$

◄ استعن بمدرسك فى برهان نتيجة (٢)



مثال

(٢) أوجد:

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - جتاس}{ظا س}$ ب $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - جتاس}{س^٢}$



الحل

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - جتاس}{ظا س} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - جتاس}{س} \times \frac{س}{ظا س}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - جتاس}{س} \times \frac{س}{ظا س} = ٠ \times ١ = ٠$

ب $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - جتاس}{س^٢} \times \frac{١ + جتاس}{١ + جتاس}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - جتا^٢س}{س^٢(١+جتاس)} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{جا^٢س}{س^٢(١+جتاس)}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{جا^٢س}{س^٢} \times \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١}{١ + جتاس} = (١)^٢ \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$

تذكر أن

$جا^٢س + جتا^٢س = ١$

حاول أن تحل

(٢) أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} ٦س^٢ قتا ٢س ظتا س$ ب $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - جتا س}{جا ٢س}$

مثال

٣ أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{س}^2 - \text{س} + \text{جا س}}{2\text{س}}$

ب $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{س} + \text{س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$

جـ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}(1 - \text{جتا س})}{1 - \text{جتا س}}$

د $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}^2 3\text{س}}{5\text{س}^2}$

الحل

أ $= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\text{س}\to 0} \left(\dfrac{\text{س}^2}{\text{س}} - \dfrac{\text{س}}{\text{س}} + \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\text{س}\to 0} \left(\text{س} - 1 + \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\,(0 - 1 + 1) = 0$

ب $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{س} + \text{س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1 + \text{جتا س}}{\dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \text{جتا س}}$

$= \dfrac{\lim\limits_{\text{س}\to 0} (1 + \text{جتا س})}{\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \text{جتا س}}$

$= \dfrac{1 + \text{جتا } 0}{1 \times \text{جتا } 0} = \dfrac{1 + 1}{1} = 2$

جـ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}(1 - \text{جتا س})}{1 - \text{جتا س}}$

اعتبر $1 - \text{جتا س} = \text{ص}$

عندما س $\longrightarrow 0$ نجد أن ص $\longrightarrow 0$

$\lim\limits_{\text{ص}\to 0} \dfrac{\text{جا ص}}{\text{ص}} = 1$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}(1 - \text{جتا س})}{1 - \text{جتا س}} = 1$

د $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}^2 3\text{س}}{5\text{س}^2}$

$= \dfrac{1}{5} \left(\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}3\text{س}}{\text{س}}\right)^2$

$= \dfrac{1}{5} \times (3)^2$

$= \dfrac{9}{5}$

حاول أن تحل

٣ أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا }3\text{س}}{5\text{س}^3 - 4\text{س}}$

ب $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{جا}(\text{س}-1)}{\text{س}^2 + \text{س} - 2}$

جـ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}^2\text{س}}{3\text{س}^2}$

د $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س جا }2\text{س} + \text{جا}^2 2\text{س}}{\text{طا}^2 3\text{س} + \text{س}^2}$



تمــاريـن ٣ – ٤

أكمل مايأتي:

١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ جتا ٣ س = ...

٢) $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}$ جا ٢ س = ...

٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ ظا س = ...

٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا ٧ س}}{\text{س}}$ = ...

٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{ظا ٣س}}{\text{٤س}}$ = ...

٦) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا (س - ٥)}}{\text{٣ (س - ٥)}}$ = ...

٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا } \pi \text{س}}{\text{٢ س}}$ = ...

٨) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{حا}^{٢}\text{ س}}{\text{س}^{٢}}$ = ...

٩) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{٣ + ٢ س}}{\text{جتا ٤ س}}$ = ...

١٠) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{١ - جتا س}}{\text{٣ س}}$ = ...

١١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{٢ س}}{\text{ظا ٣ س}}$ = ...

١٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ ٣ س قتا ٢ س = ...

١٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ ٢ س}}{\text{٣ س}^{٢}}$ = ...

١٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{حا}^{٢}\text{ س ظا ٣س}}{\text{٤س}^{٢}}$ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا ٣ س}}{\text{س}}$ تساوى

أ) صفر ب) $\frac{١}{٣}$ ج) ١ د) ٣

١٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{ظا ٤س}}{\text{٥س}}$ تساوى

أ) صفر ب) $\frac{٤}{٥}$ ج) ١ د) $\frac{٥}{٤}$

١٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا ٢ س + ٣ ظا س}}{\text{٥س}}$ تساوى

أ) ١ ب) $\frac{٥}{٦}$ ج) $\frac{٦}{٥}$ د) ٢

١٨) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{ ٢ س}}{\text{س جا ٣ س}}$ تساوى

أ) $\frac{٤}{٩}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{٢}{٣}$ د) $\frac{٤}{٣}$

١٩) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا } \frac{١}{٢} \text{ س}}{\text{جا } \frac{٣}{٤} \text{ س}}$ تساوى

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{٣}{٨}$ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{٢}{٣}$

٢٠) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ حيث س بالتقدير الستينى

أ) ١ ب) $\frac{\pi}{١٨٠}$ ج) $\frac{١٨٠}{\pi}$ د) π

أوجد:

(٢١) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{٥س}}$

(٢٢) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{ظا س}}$

(٢٣) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}$

(٢٤) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{٣(١- جتا س)}}{\text{س}}$

(٢٥) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا س (١ - جتا س)}}{\text{س}^٢}$

(٢٦) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جتا س ظا س}}{\text{س}}$

(٢٧) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}^٢\text{ س}}{\text{س}}$

(٢٨) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا}^٢\text{ ٣س}}{\text{س}^٢}$

(٢٩) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(\text{١ - جتا}^٢\text{ س})}{\text{س}^٢}$

(٣٠) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جتا س - ١}}{\text{جا س}}$

(٣١) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س - س جتا س}}{\text{جا}^٢\text{ ٣س}}$

(٣٢) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{١ - ظا س}}{\text{جاس - جتا س}}$

(٣٣) $\lim_{\text{س}\to \frac{١}{٢}} \frac{\text{س جتا (-٢س+١)}}{\text{س}^٢\text{+س}}$

(٣٤) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}^٢\text{ - ٣ جا س}}{\text{س}}$

(٣٥) $\lim_{\text{س}\to ٠^-} (\text{١ + جتا س}) \times \frac{\text{١ - جتا س}}{\text{س}^٢}$

(٣٦) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا ٣س}^٢\text{+جا}^٢\text{ ٥س}}{\text{س}^٢}$

(٣٧) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا ٥س}^٣\text{+جا}^٣\text{٥س}}{\text{٢ س}^٣}$

(٣٨) $\lim_{\text{س}\to ٠} \left(\frac{\text{٢س}^٢\text{+ جا ٣ س}}{\text{٢س}^٢\text{+ظا ٦ س}}\right)^٤$

(٣٩) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{٢س}^٣\text{+س جا ٥س}}{\text{س}^٢\text{ - ظا ٣ س}^٢}$

(٤٠) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{١ - جتاس + جا س}}{\text{١ - جتا س - جا س}}$

(٤١) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا ٢س +٥ جا ٣ س}}{\text{٢ جا ٣ س - ظا ٥س}}$

(٤٢) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س ظا ٢ س}}{\text{س}^٢\text{ + جا}^٢\text{ ٣س}}$

(٤٣) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{١ - جتا ٣س}}{\text{جتا}^٢\text{ ٢س - ١}}$

(٤٤) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{٢ - جتا ٣ س - جتا ٤ س}}{\text{س}}$

(٤٥) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا ٣ س}^٢\text{ + جا}^٢\text{ ٥ س}}{\text{س}^٢}$

(٤٦) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{١ - جتا ٣ س}}{\text{جتا}^٢\text{ ٥ س -١}}$

(٤٧) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا (جا س)}}{\text{٥ جا س}}$

(٤٨) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}}{\text{جتا }(\frac{\pi}{٢}\text{ - س})}$

(٤٩) $\lim_{\text{س}\to ٠} \text{س (قتا ٢ س - ظتا ٣ س)}$

٣ - ٥ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

Existence of Limit of a Function at a Point

سوف تتعلم

- النهاية اليمنى للدالة عند نقطة.
- النهاية اليسرى للدالة عند نقطة.
- بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

- نهاية يمنى Right Limit
- نهاية يسرى Left Limit

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

فكر و ناقش

شكل (١)

يمثل منحنى الدالة د **حيث**

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ١ & \text{لكل س} > ٢ \\ ٣ - \text{س} & \text{لكل س} < ٢ \end{cases}$$

شكل (١)

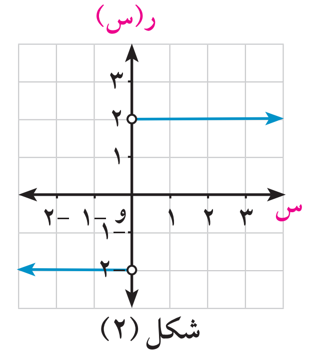
- **أوجد** $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}$ د(س) (النهاية اليمنى)
- **أوجد** $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ د(س) (النهاية اليسرى)

هل $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ د(س)

شكل (٢):

يمثل الدالة ر حيث

$$\text{ر}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & \text{لكل س} > ٠ \\ -٢ & \text{لكل س} < ٠ \end{cases}$$



شكل (٢)

- **أوجد** $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}}$ ر(س)
- **أوجد** $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}}$ ر(س) **هل** $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}}$ ر(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}}$ ر(س)

تعلم

نهاية الدالة *Limit of a Function*

النهاية اليمنى و النهاية اليسرى

يقال إن نهاية الدالة د تساوى ل عندما س تؤول إلى أ إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث ل ∈ ع

وتكتب رمزيًّا:

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل إذا و فقط إذا كان: د (أ$^+$) = د (أ$^-$) = ل

حيث: د (أ$^+$) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^+}{\text{نهـا}}$ د(س) « النهاية اليمنى للدالة»

د (أ$^-$) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^-}{\text{نهـا}}$ د(س) « النهاية اليسرى للدالة»

مثال توضيحى

أ لاحظ فى شكل (١) أن:

د(١^-) = ٣ ، د(١^+) = -١

∴ د(١^-) ≠ د(١^+)

∴ لايوجد نهاية للدالة د عند س ⟵ ١ ∴ $\lim_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة

شكل (١)

ب لاحظ فى شكل (٢) أن:

د(-١^-) = ٣ ، د(-١^+) = ٣

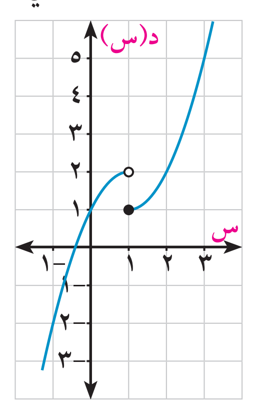
∴ د(-١^-) = د(-١^+) = ٣

∴ $\lim_{س \to -١}$ د(س) = ٣

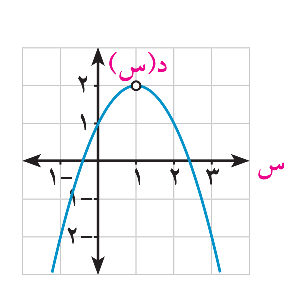
شكل (٢)

حاول أن تحل

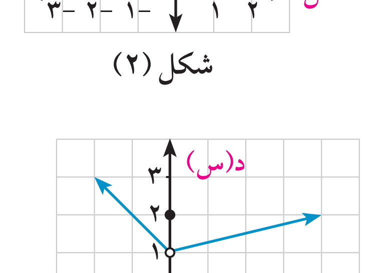
① ادرس الشكل البياني لكل دالة من الدوال الآتية ثم أوجِدْ:



أ د(١^-)
ب د (١^+)
ج $\lim_{س \to ١}$ د (س)



أ د (١^-)
ب د (١^+)
ج $\lim_{س \to ١}$ د (س)



أ د (٠^-)
ب د (٠^+)
ج $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

مثال

① ابحث وجود نهاية الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} س\,|س| - ١ & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} - ٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عندما س ⟵ ٠

الحل

بإعادة تعريف الدالة

$$د(س) = \begin{cases} س(-س) - ١ & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{س}{س} - ٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases} = \begin{cases} -س^٢ - ١ & \text{لكل } س < ٠ \\ -١ & \text{لكل } س > ٠ \end{cases}$$

∵ د(٠^-) = $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ $(-س^٢ - ١)$ = -١

د(٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ -١ = -١ ∵ د(٠^-) = د (٠^+) = -١ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = -١

حاول أن تحل

(٢) إذا كان د(س) = $\begin{cases} |س - ٣| & س \neq ٣ \\ ٢ & س = ٣ \end{cases}$

فأبحث وجود $\lim_{س \to ٣}$ د(س)

مثال

(٢) ابحث وجود نهاية للدلة د حيث: د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س}{س} & \text{لكل } س < ٠ \\ \frac{س + ظا ٢س}{٣س - جا٢س} & \text{لكل } س > ٠ \end{cases}$ عندما س ← ٠

الحل

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{س^٢ + ٢س}{س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{س(س + ٢)}{س}$

$= \lim_{س \to ٠^-} (س + ٢) = ٢$

$د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س + ظا ٢س}{٣س - جا٢س} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{\frac{س}{س} + \frac{ظا٢س}{س}}{\frac{٣س}{س} - \frac{جا٢س}{س}} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{١ + \frac{ظا٢س}{س}}{٣ - \frac{جا٢س}{س}}$

$= \frac{١ + ٢}{٣ - ٢} = ٣$

∵ $د(٠^-) \neq د(٠^+)$ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) غير موجودة

حاول أن تحل

(٣) ابحث وجود نهاية للدلة د عندما س ⟵ π حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{جاس}{س - \pi} & \text{لكل } س < \pi \\ جتا س & \text{لكل } س > \pi \end{cases}$

مثال

(٣) ابحث وجود نهاية للدلة د عندما س ⟵ ١ حيث: د(س) = $\sqrt{س - ١}$

الحل

∵ د (س) معرفة لجميع قيم س - ١ ≥ ٠ ∴ مجال الدالة د (س) = [١ ، ∞ [

∵ $د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} د(س)$ ∴ $د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} \sqrt{س - ١} = صفر$

$د(١^-)$ غير معرفة لأن الدالة غير معرفة على يسار ١

∴ د (س) ليس لها نهاية عندما س ⟵ ١

حاول أن تحل

(٤) ابحث وجود نهاية للدلة د عندما س ← ٣ حيث د (س) = $\sqrt{٣ - س}$

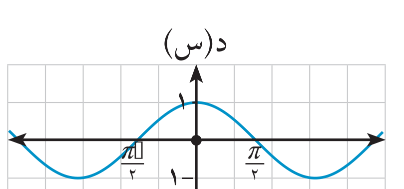


تمـاريـن ٣ – ٥



أكمل ما يأتى:

① من الشكل البيانى المقابل:



أ) نهــا د(س) = ... (س ← ٠$^-$)

ب) نهــا د(س) = ... (س ← ٠$^+$)

② من الشكل البيانى المقابل:

أ) نهــا د(س) = ... (س ← ٣$^-$)

ب) نهــا د(س) = ... (س ← ٣$^+$)

③ من الشكل البيانى المقابل:

أ) نهــا د(س) = ... (س ← -٢)

ب) نهــا د(س) = ... (س ← ٠)

جـ) نهــا د(س) = ... (س ← ٢)

د) نهــا د(س) = ... (س ← -٤)

هـ) نهــا د(س) = ... (س ← ٤)

④ الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = { ٢ لكل س ⩾ ٠ ، ٢ - س لكل س < ٠ }

أ) نهــا د(س) = ... (س ← ٠$^-$)

ب) نهــا د(س) = ... (س ← ٠$^+$)

⑤ الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = { ٣ لكل س > ٠ ، -٣ س لكل س ⩽ ٠ }

أ) نهــا د(س) = ... (س ← ٠$^+$)

ب) نهــا د(س) = ... (س ← ٠$^-$)

⑥ إذا كانت د(س) = { س لكل س ⩾ ٠ ، $\frac{١}{س}$ لكل س < ٠ }

أ) نهــا د(س) = ... (س ← ٠$^+$)

ب) نهــا د(س) = ... (س ← ٠$^-$)

ابحث وجود نهاية كل من الدوال الآتية :

(٧) $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) حيث د(س) = $\begin{cases} ٢\,س & \text{لكل } س < ٢ \\ س^{٢} & \text{لكل } س \geqslant ٢ \end{cases}$

(٨) $\lim\limits_{س \to ٣}$ د(س) حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{لكل } س < ٣ \\ ٣\,س + ١ & \text{لكل } س \geqslant ٣ \end{cases}$

(٩) $\lim\limits_{س \to ٠}$ د(س) حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & \text{لكل } س < ٠ \\ ٣س + ١ & \text{لكل } س \geqslant ٠ \end{cases}$

(١٠) $\lim\limits_{س \to -١}$ د(س) حيث د(س) = $\begin{cases} ٢\,س + ١ & \text{لكل } س < -١ \\ -١ & \text{لكل } س > -١ \end{cases}$

(١١) أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية عندما س ⟵ ١ حيث د(س) = $\begin{cases} \dfrac{(س-١)^{٢}}{|س-١|} & \text{لكل } س < ١ \\ ٦س - ٣\,م & \text{لكل } س > ١ \end{cases}$

(١٢) ابحث وجود نهاية للدالة د عندماس ⟵ ١ حيث د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٢ جا\, س}{\pi - س} & \text{لكل } س < \pi \\ ١ + جتا\, س & \text{لكل } س > \pi \end{cases}$

عندما س ⟵ π

(١٣) أوجد قيمة كل من م، ك إذا كان $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = ٧ ، د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣م & \text{لكل } س < ٢ \\ ٥س + ك & \text{لكل } س > ٢ \end{cases}$

(١٤) أوجد قيمة ك التى تجعل للدالة د(س) نهاية عندما س ⟵ -١ حيث، د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ك & \text{لكل } س < -١ \\ س + ٤ & \text{لكل } س > -١ \end{cases}$

(١٥) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ⟵ ٠ حيث، د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٥س + ظا ٢س}{٦\,س + جا\, س} & \text{لكل } س > ٠ \\ جتا\, س & \text{لكل } س < ٠ \end{cases}$

(١٦) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٣\,س}{ظا\, س} & \text{لكل } -\dfrac{\pi}{٣} < س < ٠ \\ ٣ \text{ جتا } س & \text{لكل } ٠ < س < \dfrac{\pi}{٣} \end{cases}$

أ) عندما س ⟵ $\dfrac{-\pi}{٣}$ ب) س ⟵ $\dfrac{\pi}{٣}$ ج) س ⟵ ٠

(١٧) ابحث وجود نهاية للدالة د (س) = $\dfrac{١}{س - ٢}$ عندما س ⟵ ٢

٣ - ٦ الاتصال

Continuity

سوف تتعلم

- اتصال دالة عند نقطة.
- اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية

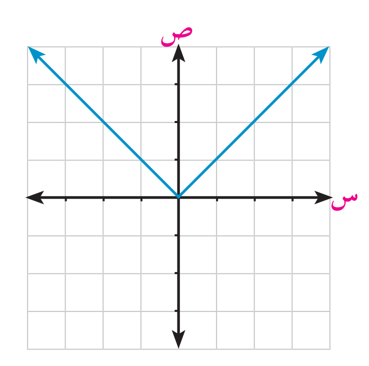
- اتصال دالة عند نقطة
Continuity of a Function at a Point
- اتصال دالة على فترة
Continuity of a Function on Interval

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

فكر و ناقش

تأمل الأشكال الآتية ثم بين ماذا تلاحظ؟

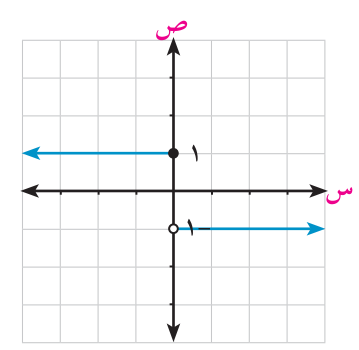


د$_1$(س) = |س|

شكل (١)

د$_2$(س) = ٢س^3

شكل (٢)



د$_3$(س) = { ١ لكل س ≤ ١ ، -١ لكل س > ١ }

شكل (٣)

د$_4$(س) = $\frac{١}{|س + ٢|}$

شكل (٤)

في **شكل (١)** ، **(٢)** نلاحظ أن منحنى كل من الدالتين متصل وغير متقطع عند أى نقطة.

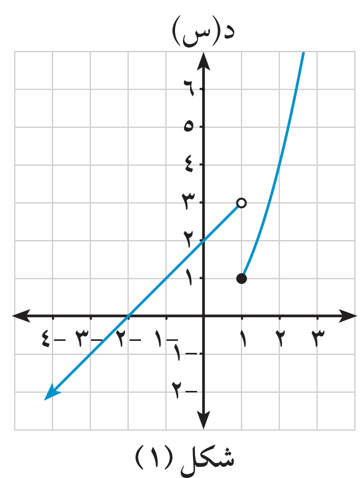
في **شكل (٣)** منحنى الدالة غير متصل عند س = ...

في **شكل (٤)** منحنى الدالة غير متصل عند س = ...

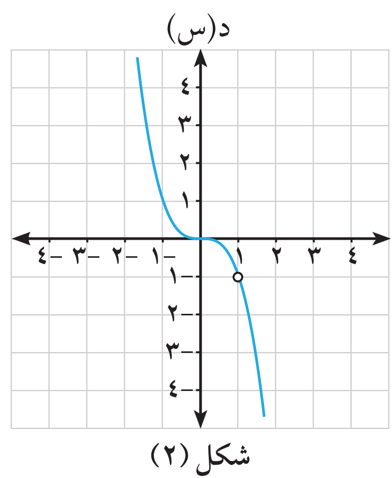
مما سبق **نستنتج أن** الدالة (د) تكون متصلة عند س = أ إذا كان منحنى الدالة لا يعانى انقطاعًا عند هذه النقطة، وتكون الدالة غير متصلة عند س = أ إذا انقطع منحناها عند هذه النقطة.

اتصال دالة عند نقطة

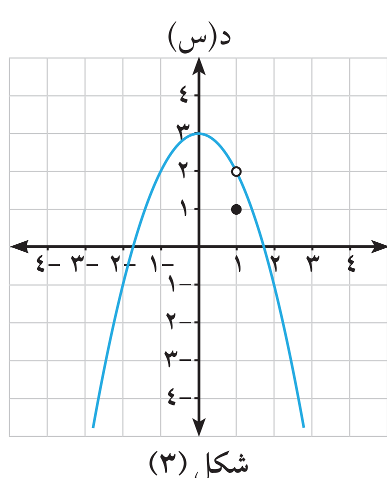
Continuity of a fanction at a Point



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

تأمل الأشكال السابقة ثم أوجد نهـا د(س) (س ← ١)، د(١) إن وجدت.

في الشكل (١): نهـا د(س) (س ← ١^+) = ١ ، نهـا د(س) (س ← ١^-) = ٣ **أي أن** نهـا د(س) (س ← ١) غير موجودة بينما د(١) = ١

في الشكل (٢): نهـا د(س) (س ← ١^+) = -١ ، نهـا د(س) (س ← ١^-) = -١ **أي أن** نهـا د(س) (س ← ١) = -١ ، د(١) غير معرفة.

في الشكل (٣): نهـا د(س) (س ← ١^+) = ٢ ، نهـا د(س) (س ← ١^-) = ٢ **أي أن** نهـا د(س) (س ← ١) = ٢ بينما د(١) = ١

أي أن: نهـا د(س) (س ← ١) ≠ د(١)

لذلك تكون الدالة د في كل شكل من الأشكال السابقة غير متصلة عند س = ١

تعريف

تكون الدالة د متصلة عندما س = أ ؛ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:

- د(أ) معرفة
- نهـا د(س) (س ← أ) موجودة
- نهـا د(س) (س ← أ) = د(أ)

مثال

بحث اتصال دالة عند نقطة

١) ابحث اتصال الدالةد حيث د(س) = { س لكل س ≤ ١ ، س+١ لكل س > ١ }

أ) عند س = ٠ ب) عند س =١

الحل

أ) بحث الاتصال عند س = ٠

د(٠) = ٠، نهـا د(س) (س ← ٠) = نهـا س (س ← ٠) = صفر ،

أي أن نهـا د(س) (س ← ٠) = د(٠)

لذلك فإن الدالة متصلة عند س = ٠

ب بحث اتصال الدالة عند س = ١

نلاحظ أن قاعدة الدالة يمين النقطة س = ١ تختلف عن قاعدتها يسار تلك النقطة لذلك نبحث وجود نهاية يمنى ونهاية يسرى للدالة عند س =١

$د(١^+) = \lim\limits_{س \leftarrow ١} (س + ١) = ٢ ،\ د(١^-) = \lim\limits_{س \leftarrow ١} س = ١$

أي أن: د(١ $^+$) $\neq$ (د(-١) وهذا الشرط يكفي لعدم اتصال الدالة د عند س = ١

والشكل البياني يوضح عدم اتصال الدالة عند س = ١



حاول أن تحل

① ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ٤س - ١ & \text{عندما } س \leqslant ١ \\ س^٢ + ٢ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

مثال

التحقق من اتصال دالة عند نقطة

② ابحث إتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها:

أ د(س) = $\frac{س + ٣}{س - ٢}$ عند س = ٢، س = ٣

ب د(س) = ٥ - |س - ٣| عند س = ٣

الحل

أ **أولًا:** بحث اتصال الدالة عند س = ٢

∵ مجال الدالة = ع - {٢} ∴ د(س) غير معرفة عند س = ٢

∴ د(س) غير متصلة عند س = ٢

ثانيًا: بحث اتصال الدالة عند س = ٣

∵ $د(٣) = \frac{٣ + ٣}{٣ - ٢} = ٦$ ، ∵ $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{س + ٣}{س - ٢} = \frac{٣ + ٣}{٣ - ٢} = ٦$

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} د(س) = د(٣)$ ∴ د(س) متصلة عند س = ٣

ب بإعادة تعريف الدالة د(س) = $\begin{cases} ٨ - س & \text{عندما } س \geqslant ٣ \\ س + ٢ & \text{عندما } س < ٣ \end{cases}$

∵ د(٣) = ٥ ، ∵ $د(٣^+) = \lim\limits_{س \leftarrow ٣^+} (٨ - س) = ٥$ ، $د(٣^-) = \lim\limits_{س \leftarrow ٣^-} (س + ٢) = ٥$

$\lim\limits_{س \leftarrow ٣} د(س) = ٥$ **أي أن** $د(٣) = \lim\limits_{س \leftarrow ٣} د(س)$

لذلك فإن الدالة متصلة عند س = ٣

حاول أن تحل

② ابحث اتصال كل من الدوال لآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها:

أ د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ عند س = ١ ، س = ٢

ب د(س) = ٣ - |س -٢| عند س = ٢

إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة

إذا كانت د(س) غير متصلة عند س = أ وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نها}}$ د(س) لها وجود فأنه يمكن إعادة تعريف الدالة د حتى تصبح متصلة عند س = أ.

مثال

(٣) أعد تعريف كل من الدوال الآتية إن كان ذلك ممكنًا بحيث تصبح متصلة عند س =١

أ) د(س) = $\dfrac{\text{س}^2 + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١}$

ب) د(س) = $\begin{cases} \text{س}^3 + ٢\text{س} ، & \text{س} > ١ \\ ٥\text{س} - ١ ، & \text{س} < ١ \end{cases}$

الحل

أ) لكى تكون الدالة د متصلة عند س = ١ فإن $\underset{\text{س}\leftarrow١}{\text{نها}}$ د(س) = د(١)

$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow٣}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٣)}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\leftarrow١}{\text{نها}} (\text{س} + ٣)$

أي أن $\underset{\text{س}\leftarrow١}{\text{نها}}$ د(س) = ٤

لذلك يمكن إعادة تعريف د لتصبح متصلة وتكون د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١} & \text{عندما س} \neq ١ \\ ٤ & \text{عندما س} = ١ \end{cases}$

ب) لكى تكون الدالة متصلة عند س = ١، لابد أن تكون د(١) = $\underset{\text{س}\leftarrow١}{\text{نها}}$ د(س)

د(١^+) = $\underset{\text{س}\leftarrow١}{\text{نها}} (\text{س}^3 + ٢\text{س}) = ١ + ٢ \times ١ = ٣$ ، د(١^-) = $\underset{\text{س}\leftarrow١^-}{\text{نها}} (٥\text{س} - ١) = ٥ - ١ = ٤$

$\because$ د(١^-) $\neq$ د(١^+) لذلك فإنه لا يوجد نهاية للدالة عندماس ← ١

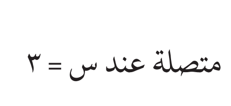
ولا يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تصبح متصلة عند س = ١

حاول أن تحل

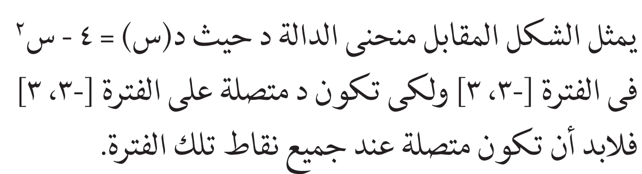
(٣) أعد تعريف الدالة الآتية حتى تصبح متصلة عند س = ٣ إذا كان ممكنًا حيث د(س) = $\dfrac{\text{س}^2 - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٣}$

(٤) بين أن د(س) = $\dfrac{\text{س}^2 + ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٣}$ غير متصلة عند س = ٣

ثم أوجد قيمة هـ التى تجعل د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 + ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٣} & \text{عندما س} \neq ٣ \\ \text{هـ} + ١ & \text{عندما س} = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣



اتصال دالة على فترة *continuity of a Function on an Interval*



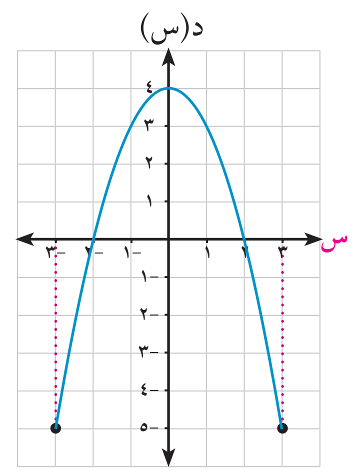
يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) = ٤ - س^2

فى الفترة [-٣، ٣] ولكى تكون د متصلة على الفترة [-٣، ٣]

فلابد أن تكون متصلة عند جميع نقاط تلك الفترة.

أى أن: $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نها}}$ د(س) = د(أ) لكل أ $\in$]-٣، ٣[

$\underset{\text{س}\leftarrow-٣^+}{\text{نها}}$ د(س) = د(-٣) ، $\underset{\text{س}\leftarrow٣^-}{\text{نها}}$ د(س) = د(٣)



ومما سبق يمكن التوصل إلى التعريف الآتى:

تعريف ٢

إذا كانت د معرفة على الفترة [أ، ب].

تكون الدالة متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:

١- د(س) متصلة على الفترة]أ، ب[

٢- $\lim_{س \to أ^+}$ د(س) = د(أ) ، $\lim_{س \to ب^-}$ د(س) = د(ب)

بالاعتماد على التعريف السابق ونهايات الدول يمكن بيان بعض الدوال المتصلة

١- الدالة كثيرة الحدود: متصلة على ع أو على مجال تعريفها.

٢- الدالة الكسرية: متصلة على ع عدا مجموعة أصفار المقام.

٣- دالة الجيب د(س) = جا (س) وجيب التمام د(س) = جتا س: متصلة على ع

٤- دالة الظل: د(س)= ظاس متصلة على ع - { س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + نπ} ، ن ∈ ص

مثال

(٤) ابحث اتصال الدالة الآتية على الفترة [٠ ، ∞[

حيث د(س) = $\begin{cases} \text{جا س - جتا س} & \text{لكل } ٠ \leqslant س \leqslant \pi \\ \text{جتا ٢س} & \text{لكل } س > \pi \end{cases}$

الحل

د(س) = جا س - جتا س (على الفترة من ٠ إلى π) ، د(س) = جتا ٢س (من π إلى ∞)

د(س) معرفة على الفترة [٠، ∞[

لكى نبحث اتصال الدالة، نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية، وكذلك اتصالها عند النقاط التى يتغير عندها تعريف الدالة وأيضًا من اليمين عند الصفر.

١) د(س) = جا س - جتا س متصلة على الفترة]٠، π[

كذلك د(س) = جتا ٢س متصلة على الفترة]π، ∞[

٢) د(٠) = جا ٠ - جتا ٠ = - ١ ، $\lim_{س \to ٠^+}$ (جا س - جتا س) = - ١

أى أن: د(٠) = $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) فالدالة متصلة من جهة اليمين عند س = ٠

٣) نبحث اتصال الدالة عندما س = π

د(π) = حاπ - حتاπ = ١

د(π^-) = $\lim_{س \to \pi^-}$ (جا س - جتا س) = ١ ، د(π^+) = $\lim_{س \to \pi^+}$ جتا ٢س = ١

د(π^-) = د(π^+) ، د(π) = ١   **أى أن:** د(π^-) = د(π^+) = د(π)

∴ متصلة عند س = π **من (١) ، (٢) ، (٣)** الدالة متصلة على [٠ ، ∞[

حاول أن تحل

⑤ ابحث اتصال الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} ١ + جا س & ٠ \leqslant س < \frac{\pi}{٢} \\ ٢ + (س - \frac{\pi}{٢})^٢ & س \geqslant \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

مثال

⑤ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها:

أ د(س) = س^٢ - ٣س + ٢   **ب** د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٤}$

ج د(س) = $\frac{جا س + جتا س}{س^٢ - ١}$ **د** د(س) = $\frac{ظا س}{س^٢ + ١}$

الحل

أ د(س) = س^٢ - ٣س + ٢ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية فهى متصلة على ع

ب د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٤}$ دالة كسرية مجالها = ع - {-٤} ، مجموعة أصفار المقام= {-٤}

أى أن الدالة متصلة على ع - {-٤}

ج د(س) = $\frac{جا س + جتا س}{س^٢ - ١}$

∵ جا س، جتا س متصلة على ع ، دالة المقام (س^٢ - ١) متصلة على ع ، أصفار المقام = {-١ ، ١}

∴ الدالة د متصلة على ع - {-١، ١}

د د(س) = $\frac{ظا س}{س^٢ + ٤}$

دالة البسط: ظا س متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π، ن ∈ ص}

دالة المقام: س^٢ + ١ > ٠ لجميع قيم س فلا توجد أصفار للمقام.

أي أن د متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π، ن ∈ ص}



لاحظ أن

إذا كانت $د_١$، $د_٢$ متصلتين على ح فإن:

١- $د_١ \pm د_٢$ متصلة على ح

٢- $د_١ \times د_٢$ متصلة على ح

٣- $\frac{د_١}{د_٢}$ تكون متصلة على ح عدا مجموعة أصفار المقام.

حاول أن تحل

٦ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٧

ب $د(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$

ج $د(س) = \frac{س^٣ + ١}{جا س}$

د د(س) = (س + ١) جتا س

٧ الربط بالكيمياء

إذا كان معدل التفاعل فى تجربة كيميائية يعطى بالدالة ر حيث ر(س) = $\frac{٠{,}٦ س}{س + ١٢}$ ، س تركيز المحلول. ابحث فى الشبكة الدولية للمعلومات عن تجارب كيميائية يمكن تمثيلها بتلك الدالة ثم:

أ مثل الدالة بيانيًّا بأحد البرامج الرسومية.

ب ابحث اتصال هذه الدالة.

مثال

٦ بين أن الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{س^٢ + س + ١}$ متصلة على ح

الحل

حيث أن $س^٢ + س + ١$ موجب لجميع قيم س ∈ ح

(المميز = $ب^٢ - ٤ أ حـ = ١ - ٤ = -٣ < صفر$)

أو $س^٢ + س + ١ = (س + \frac{١}{٢})^٢ + \frac{٣}{٤}$ مجموع مربعين

∴ $س^٢ + س + ١$ موجب لجميع قيم س ∈ ح

∴ د (س) = $(\sqrt{س^٢ + س + ١})$ معرفة لجميع قيم س ∈ ح

لكل أ ∈ المجال ح نجد أن د (أ) = $\sqrt{أ^٢ + أ + ١}$

$\lim_{س \to أ} د(س) = \lim_{س \to أ} (\sqrt{س^٢ + س + ١}) = \sqrt{أ^٢ + أ + ١}$

∴ د (أ) = $\lim_{س \to أ} د(س)$ لكل أ ∈ ح

∴ د (س) متصلة على ح

حاول أن تحل

٨ ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ على مجالها.

تمارين ٣ – ٦

ادرس اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة:

(١) $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س \leq ١ \\ ٣س & ، س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٢) $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س \leq ٢ \\ ٢س - ١ & ، س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٣) $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣س + ٢ & ، س \leq ٣ \\ س^{٢} - ٢س - ١ & ، س > ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٤) $د(س) = \begin{cases} س + ٤ & ، س < -٢ \\ ١ & ، -٢ \leq س < -١ \\ ٢س + ٣ & ، س \geq -١ \end{cases}$ عند س = -٢، عند س = -١

(٥) $د(س) = \begin{cases} \frac{جا(س - ٢)}{س^{٢} - ٤} & ، س < ٢ \\ ١ - \frac{٣}{س^{٢}} & ، س \geq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٦) $د(س) = \begin{cases} \frac{١ - جتا س}{س} & ، س > ٠ \\ ٢ جا س & ، س \geq ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ع:

(٧) $د(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + ١$

(٨) $د(س) = \frac{-س}{س^{٢} + ١}$

(٩) $د(س) = \frac{٣س + ٢}{س^{٢} - ٢س}$

(١٠) $د(س) = \frac{٢س - ٣}{س^{٢} - ٢س - ١٥}$

(١١) $د(س) = \frac{س}{|س| - ٢}$

(١٢) $د(س) = \frac{|س + ٢|}{(س + ٢)^{٢}}$

(١٣) $د(س) = جا س - ٣ جتا (س + ١)$

(١٤) $د(س) = س^{٢} + جتا^{٢} س$

(١٥) $د(س) = س^{٣} جا ٢ س$

(١٦) $د(س) = ظا^{٢} س - ١$

(١٧) $د(س) = \frac{جا^{٢} س + جتا س}{س^{٢} - ٩}$

(١٨) $د(س) = \frac{ظا س}{س^{٢} - ٩}$

ابحث اتصال كل الدوال الآتية على الفترة المعطاة:

(١٩) $د(س) = \begin{cases} \frac{س ظاس + جا^{٢} ٣س}{٥س^{٢}} & ، -\frac{\pi}{٤} < س < ٠ \\ ٢ جتا ٢ س & ، ٠ \leq س < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$ على الفترة $]-\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤}[$

(٢٠) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٦} - ١}{س^{٣} - ١} & ، -٤ < س < ١ \\ ٣س - ١ & ، ١ \leq س < ٤ \\ س^{٢} & ، ٤ \leq س < ٦ \end{cases}$ على الفترة $]-٤ ، ٦[$

أوجد قيم أ في كل مما يأتي إذا كان:

(٢١) $د(س) = \frac{س + ٣}{س^{٢} + أس + ٩}$ متصلة على ع

٢٢) $د(س) = \begin{cases} \frac{(س+٣)^٤ - ٨١}{س} & \text{حيث } س \neq ٠ \\ أ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$ متصلة على ع

أوجد قيمتي الثابتين ب ، جـ في كل مما يأتي:

٢٣) $د(س) = \begin{cases} س + ١ & ، ١ < س < ٣ \\ س^٢ + ب س + جـ & ، س \in ع -]١ ، ٣[\end{cases}$ متصلة على ع

٢٤) $د(س) = \begin{cases} س + ٢ب & ، س < -٢ \\ ٣ب س + حـ & ، -٢ \leqslant س \leqslant ١ \\ ٣س - ٢ب & ، س > ١ \end{cases}$ متصلة على ع

أعد تعريف كل من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة عند النقط المبينة إذا كان ممكنًا:

٢٥) $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \geqslant ٢ \\ \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، س < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

٢٦) $د(س) = \begin{cases} \frac{٣س + ١ - جتا س}{٥س} & ، س > ٠ \\ \frac{٣}{٥} جتا س & ، س < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

٢٧) $د(س) = \begin{cases} \frac{(س - ٣)^{٥٠} + (س - ٣)}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ جتا (٣ - س) & ، س < ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

٢٨) $د(س) = \frac{س^٢ - س - ٦}{س - ٣}$ عند س = ٣

٢٩) أوجد قيمة جـ التي تجعل الدالة د متصلة عند جـ حيث: $د(س) = \begin{cases} ٢ - س^٢ & س \leqslant جـ \\ س & س > جـ \end{cases}$

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.



مقدمة الوحدة

حساب المثلثات Trigonometry هو أحد فروع مادة الرياضيات ويعتبر قدماء المصريين أول من عملوا بقواعد حساب المثلثات حيث استخدموها في بناء الأهرامات وبناء معابدهم ، وترجع معرفتنا بحساب المثلثات إلى الأغريق الذين وضعوا قوانينها واستخدموها في إيجاد بعض العلاقات التى تربط بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه، كما ساهم علماء العرب والمسلمين في حل المعادلات المثلثية كما استخدموا المماسات والقواطع ونظائرها في قياس المسافات والزوايا كما ابتكروا طريقة لإنشاء جداول للجيوب في المثلثات المستوية.

ونشير هنا إلى العالم السويسري ليونارد اويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) الذي قدم تعبيرًا جديدًا للدوال المثلثية ، كما استخدم الكثير من الرموز الرياضية التي تساعد في استخدام المسائل الرياضية المتقدمة التي تدرس في جميع المدارس والجامعات حتى الان وسوف نتناول في هذه الوحدة بعض القوانين والعلاقات التى تربط بين أضلاع المثلث وزواياه.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذًا للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعّرف على قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث ، والتى تنص على: فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب فى إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث.
- يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها فى حل تمارين متنوعة.
- يتعّرف على قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث.
- يستخدم قانونا (قاعدتا) الجيب وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث فى الحالات الآتية:
- إذا علم فى المثلث قياسا زاويتين، وطول أحد أضلاعه.
- إذا علم فى المثلث طولا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانوني (قاعدتي) الجيب وجيب التمام لأى مثلث.

المصطلحات الأساسية

- حساب المثلثات Trigonometry
- قاعدة الجيب Sine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle
- حالة مبهمة Ambiguous Case
- حلول ممكنة Possible Solutions
- حل وحيد Unique Solution
- أقصر ضلع Shortest Side
- أطول ضلع Longest Side
- مساحة المثلث Area of The Triangle
- أطوال أضلاع المثلث The Lengths of The Sides of the Triangle
- زاوية مقابلة لضلع Opposite Angle of a Side
- أصغر زاوية Smallest Angle
- أكبر زاوية Largest Angle
- قاعدة جيب التمام Cosine Rule

دروس الوحدة

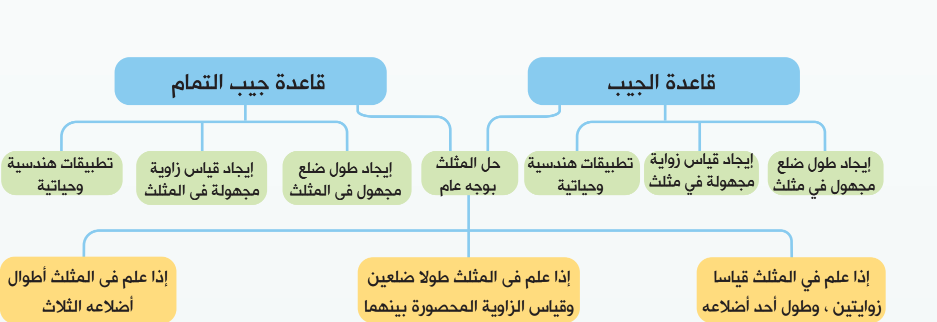
الدرس (١ - ٤): قانون (قاعدة) الجيب.

الدرس (٢ - ٤): قانون (قاعدة) جيب التمام.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمي للوحدة



٤ - ١ قانون (قاعدة) الجيب

The Sine Rule

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب فى حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة الجيب
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها.

المصطلحات الأساسية

- حساب المثلثات Trigonometry
- قاعدة الجيب Sine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle
- حالة مبهمة The Ambiguous Case

الأدوات المستخدمة

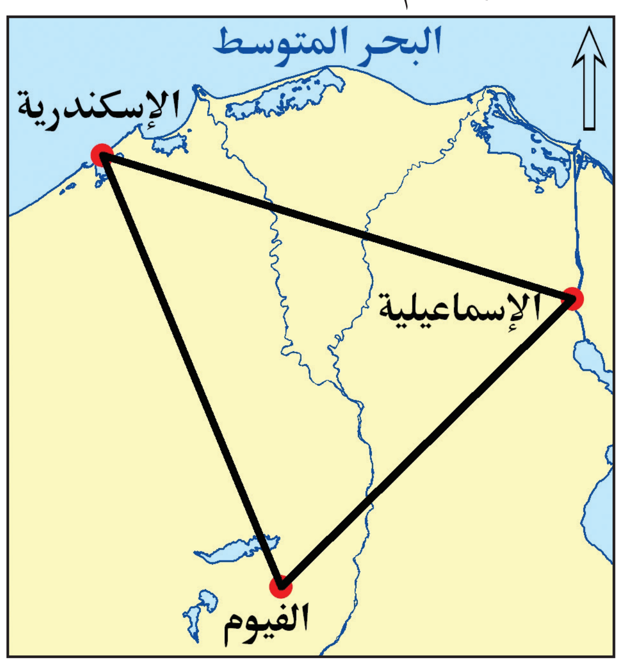
- آلة حاسبة علمية

سبق أن تعلمت إيجاد طول أحد أضلاع المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولي ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين والآن سوف نتعلم طرقًا آخرى لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا المثلث بوجه عام.

نشاط

أراد كريم إيجاد المسافة بين الفيوم والإسماعيلية باستخدام البيانات المتوفرة على الخريطة الموضحة في الشكل المقابل.

قم بعمل قياس للرسم ثم قس المسافة بين الفيوم والإسماعيلية (المقياس هو ١ سم لكل ٤٣ كم) تأكد من صحة قياساتك بعد دراستك لطرق حل المثلث غير قائم الزاوية ، وإحدى هذه الطرق هو قانون (قاعدة) الجيب.



تعلم

(أستنتاج قانون الجيب لا يمتحن فيه الطالب)

قانون (قاعدة) الجيب *The Sine Rule*

في المثلث أ ب جـ إذا استخدمنا الرمز أَ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية أ ، والرمز بَ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية ب ، والرمز جـَ للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية جـ ، فإنه

يمكن استخدام قانون مساحة سطح المثلث لاستنتاج قانون الجيب الذي يبين العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وجيوب الزوايا المقابلة له.

أى أن: $\frac{1}{2}$ بَ جـَ جا أ = $\frac{1}{2}$ أَ جـَ جا ب = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا جـ

صيغ مساحات المثلث المتساوية

تذكر أن

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أى ضلعين × جيب الزاوية بينهما

ب َجـ َ جا أ = أ َ جـ َ جا ب = أ َ ب َ جا جـ — بضرب كل عبارة في ٢

$\frac{ب َجـ َ جا أ}{أ َب َجـ َ} = \frac{أ َجـ َ جا ب}{أ َب َجـ َ} = \frac{أ َب َ جا جـ}{أ َب َجـ َ}$ — بقسمة كل عبارة على أ َب َجـ َ

$\frac{جا أ}{أ َ} = \frac{جا ب}{ب َ} = \frac{جا جـ}{جـ َ}$ — بالتبسيط

$\frac{أ َ}{جا أ} = \frac{ب َ}{جا ب} = \frac{جـ َ}{جا جـ}$ — من خواص التناسب

أي أن: في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها وتعرف هذه العلاقة بقاعدة الجيب أي : $\frac{أ َ}{جا أ} = \frac{ب َ}{جا ب} = \frac{جـ َ}{جا جـ}$

تذكر أن

مساحة المثلث أ ب جـ

= $\frac{١}{٢}$ أ َ ب َ جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ أ َ جـ َ جا ب

= $\frac{١}{٢}$ ب َ جـ َ جا أ

استخدام قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد طول ضلع في المثلث

مثال

① أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠أ) = ٣٣ َ ٥٤ ° ، ق (∠ب) = ٢٢ َ ٤٩ ° ، أ َ = ١٢٤,٥سم

الحل

أكبر ضلع في المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية (التباين في المثلث)

ق (∠جـ) = ١٨٠° - [ق (∠أ) + ق (∠ب)]

= ١٨٠° - [٣٣ َ ٤٥° + ٢٢ َ ٤٩°] = ٥ َ ٧٦°

∴ أكبر طول ضلع هو جـ َ لأنه يقابل أكبر زاوية فى المثلث وهى زاوية جـ

∵ $\frac{أ َ}{جا أ} = \frac{جـ َ}{جا جـ}$ ∴ $\frac{١٢٤,٥}{جا ٣٣ َ ٥٤°} = \frac{جـ َ}{جا ٥ َ ٧٦°}$

∴ جـ َ = $\frac{١٢٤,٥ جا ٥ َ ٧٦°}{جا ٣٣ َ ٥٤°}$ = ١٤٨,٤سم

تذكر أن

في أي مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزاوية الأكبر قياسًا، ويكون الضلع الأصغر طولًا مقابلًا للزاوية الأصغر قياسًا.

حاول أن تحل

① أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠أ) = ٤٣° ، ق (∠ب) = ٦٥° ، جـ َ = ٨,٤سم

حل المثلث باستخدام قانون الجيب *Solving the triangle using the sine rule*

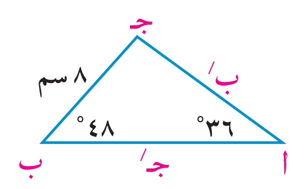
المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات عناصره المجهولة باستخدام القياسات المعطاة بشرط أن يكون من بينها طول أحد أضلاع المثلث على الأقل.

أولًا: حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياسي زاويتين:

مثال

② حل المثلث أ ب جـ حيث أ َ = ٨سم ، ق (∠أ) = ٣٦° ، ق (∠ب) = ٤٨°

الحل



$ق(\angle جـ) = ١٨٠° - (٣٦° + ٤٨°) = ٩٦°$

$\because \frac{أ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب}$ $\quad \therefore \frac{٨}{جا ٣٦°} = \frac{بَ}{جا ٤٨°}$

$\therefore بَ = \frac{٨ جا ٤٨°}{جا ٣٦°} \simeq ١٠,١١٤$ سم.

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة، تأكد أولًا من تهيئة الحاسبة لاستخدام التقدير الستيني لقياسات الزوايا ثم اضغط المفاتيح من اليسار إلى اليمين:

ابدأ ← (8 × SIN 4 8) ÷ SIN 3 6 =

$\because \frac{أ}{جا أ} = \frac{جـَ}{جا جـ}$ $\quad \therefore \frac{٨}{جا ٣٦°} = \frac{جـَ}{جا ٩٦°}$ $\quad \therefore جـَ = \frac{٨ جا ٩٦°}{جا ٣٦°} \simeq ١٣,٥٣٥$ سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي:

إبدأ ← (8 × SIN 9 6) ÷ SIN 3 6 =

حاول أن تحل

٢ حل المثلث أ ب جـ حيث أَ = ٨سم، ق($\angle$أ) = ٦٠°، ق($\angle$ب) = ٤٠°

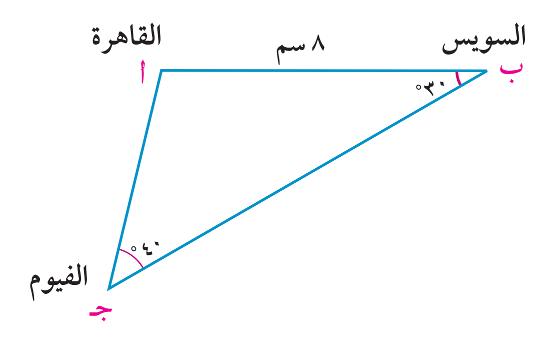
مثال

٣ **الربط بالجغرافيا:** الشكل المجاور يمثل ثلاثة مواقع لمدن مصرية تكون مثلثًا إذا كانت المسافة على الخريطة بين السويس والقاهرة ٨سم وقياس الزاوية عند الفيوم ٤٠° فأوجد لأقرب كيلو متر:

أ المسافة بين القاهرة والفيوم.

ب المسافة بين السويس والفيوم.

علمًا بأن كل اسم على الرسم يمثل ١٦,٧٥ كم



الحل

$ق(\angle أ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°$

$\because \frac{أ جـ}{جا ٣٠°} = \frac{ب جـ}{جا ١١٠°} = \frac{٨}{جا ٤٠°}$

$\therefore أ جـ = \frac{٨ \times جا ٣٠°}{جا ٤٠°} \simeq ٦,٢٢$ سم

$ب جـ = \frac{٨ \times جا ١١٠°}{جا ٤٠°} \simeq ١١,٧$ سم

$\therefore$ المسافة بين القاهرة والفيوم $\simeq ٦,٢٢ \times ١٦,٧٥ \simeq ١٠٤$ كم

$\therefore$ المسافة بين السويس والفيوم $\simeq ١١,٧ \times ١٦,٧٥ \simeq ١٩٦$ كم

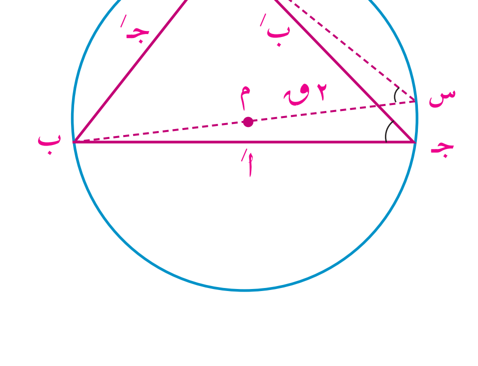
تطبيقات هندسية لقانون الجيب *Geometrical Applications on the Sine Rule*

تمرين مشهور

في أي مثلث أ ب جـ يكون: $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = ٢\text{نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

البرهان:- **(البرهان لا يمتحن فيه الطالب)**



إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث حاد الزوايا

نرسم الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا ثم

نرسم القطر $\overline{\text{ب س}}$ والوتر $\overline{\text{س أ}}$

∵ ق(∠ب أ س) = ٩٠° ، ق(∠أ س ب) = ق(∠أ جـ ب)

∴ جا س = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب س}}$ ، جا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب س}}$

فيكون أ ب = ب س جا جـ

∴ جـَ = ٢نق جا جـ أي أن: $\frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = ٢\text{نق}$

بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن: $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = ٢\text{نق}$ ، $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = ٢\text{نق}$

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = ٢\text{نق}$

مثال

(٤) مثلث ل م ن فيه مَ = ٦٨,٤سم ، ق(∠م) = ١٠٠° ، ق(∠ن) = ٤٠° أوجد:

(أ) لَ (ب) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن

(جـ) مساحة سطح المثلث ل م ن

الحل

ق(∠ل) = ١٨٠° - (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

$\frac{\text{لَ}}{\text{جا ٤٠°}} = \frac{٦٨,٤}{\text{جا ١٠٠°}}$ **(قانون الجيب)**

لَ = $\frac{٦٨,٤}{\text{جا ١٠٠°}}$ × جا ٤٠° ≃ ٤٤,٦٤سم **وهو المطلوب (١)**

∵ $\frac{\text{مَ}}{\text{جا م}} = ٢\text{نق}$ ∴ $\frac{٦٨,٤}{\text{جا ١٠٠°}} = ٢\text{نق}$

أي أن نق = $\frac{٦٨,٤}{\text{٢ جا ١٠٠°}}$ ≃ ٣٤,٧٢ سم **وهو المطلوب (٢)**

مساحة المثلث ل م ن = $\frac{١}{٢}$ مَ لَ جا ن = $\frac{١}{٢}$ × ٦٨,٤ × ٤٤,٦٤ جا ٤٠° = ٩٨١,١ سم²

حاول أن تحل

(٣) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٢٥سم ، ق(∠ب) = ١٨َ ٣٥° ،
ق(∠جـ) = ٤٢َ ١٠٣° أوجد مساحته، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

مثال

(٥) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أء // ب جـ ، أء = ٧,٤سم ، ق(∠ب) = ٦٢° ، ق(∠ء) = ١٠٦°،
ق(∠أ جـ ب) = ٤١°. أوجد

أولًا: طول كل من أ جـ ، ب جـ **ثانيًا:** مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ ء لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

في المثلث أ جـ ء

∵ ق(∠ء أ جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٤١° (بالتبادل)

، ق(∠أ جـ ء) = ١٨٠° - (٤١° + ١٠٦°) = ٣٣°

∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ١٠٦°} = \frac{٧,٤}{\text{جا } ٣٣°}$ ∴ أ جـ = $\frac{٧,٤ \times \text{جا } ١٠٦°}{\text{جا } ٣٣°}$ = ١٣,٠٦سم

في المثلث أ ب جـ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° - (٦٢° + ٤١°) = ٧٧°

∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٧٧°} = \frac{١٣,٠٦}{\text{جا } ٦٢°}$ ∴ ب جـ = $\frac{١٣,٠٦ \times \text{جا } ٧٧°}{\text{جا } ٦٢°}$ = ١٤,٤١سم

مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ ء = $\frac{١}{٢}$ أ جـ × ب جـ جا ٤١° + $\frac{١}{٢}$ أ جـ × أ ء جا ٤١°

= $\frac{١}{٢}$ × ١٣,٠٦ × (٧,٠٤ + ١٤,٤١) × جا ٤١° ≃ ٩٣سم^٢

حاول أن تحل

(٤) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه جـ ء = ١٠٠سم ، ق(∠ب جـ أ) = ٣٦° ، ق(∠ب ء أ) = ٥٥° ،
ق(∠ب جـ ء) = ٨٥° ، ق(∠جـ ء أ) = ٨٧° ، أوجد طول كل من ب ء ، أ جـ لأقرب سنتيمتر.

تمارين ٤ - ١

أكمل كل مما يأتي:

(١) في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع ....

(٢) في المثلث أ ب جـ إذا كان ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا جـ فإن أَ : بَ : جـَ = ...

(٣) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه ١٠√٣ سم، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث = ...

(٤) مثلث أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠جـ) = ٤٠° ، جـَ = ٨,٤سم فإن أَ = ... سم

(٥) في المثلث أ ب جـ يكون $\frac{٢ \text{ بَ}}{\text{جا ب}}$ = ...نق

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(٦) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٣٠° ، أَ = ١٠سم هو: ....

أ) ١٠ سم ب) ٢٠سم جـ) ٥سم د) ٤٠سم

(٧) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٤سم ، ق(∠أ) = ٣٠° فإن أَ هو:

أ) ٤سم ب) ٢سم جـ) ٤√٣ د) $\frac{١}{١٦}$

٨) في المثلث أ ب جـ يكون المقدار ٢ نق جا أ مساويًا:

(أ) أَ (ب) بَ (ج) جـَ (د) مـ(△أ ب جـ)

٩) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن $\frac{صَ}{٢ جا ص}$ يساوى:

(أ) نق (ب) ٢نق (ج) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤نق

١٠) △ل م ن فيه، ق(∠ل) = ٣٠°، م ن = ٧سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه تساوى:

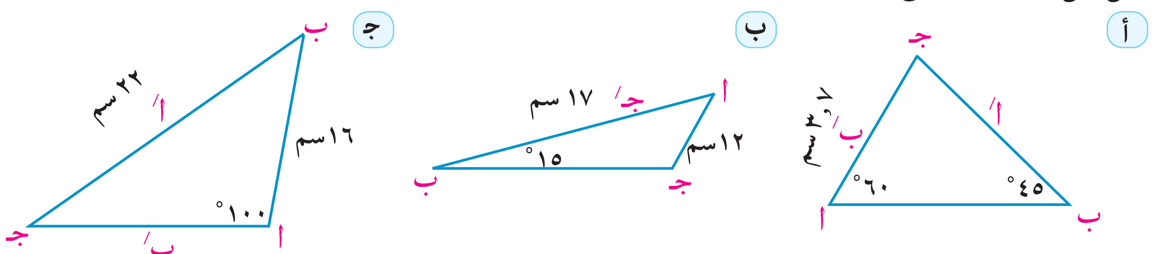
(أ) ٧ سم (ب) ٣,٥ سم (ج) ١٤سم (د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

١١) في المثلث س ص ع إذا كان ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن سَ: صَ: عَ تساوى:

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (ج) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

١٢) **حل كل مثلث مما يلي:**

(أ) (ب) (ج)



١٣) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، أثبت أن: أَ: بَ: جـَ = $\sqrt{٦}$: ٢ : $\sqrt{٣}$ + ١

١٤) أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٩,٧٧سم وقطراه أجـ، ب ء يصنعان مع ضلعه أب زاويتين مقدارهما ٣٦° ٢٢َ، ٤٤° ٥٨َ، أوجد طولى القطرين.

١٥) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أء // ب جـ، أ ء = ١٠,٧سم، ق(∠ء) = ١٠٠°، ق(∠ب) = ٦١° ١٩َ، ق(∠جـ أ ء) = ٣٣° ٥٠َ، أوجد طول كل من أ جـ، ب جـ

١٦) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ق(∠ب جـ ء) = ٨٥°، ق(∠جـ ء أ) = ٨٧°، ق(∠ب جـ أ) = ٣٦°، ق(∠ب ء أ) = ٥٥° جـ ء = ١٠٠٠ متر أوجد طول كل من ب ء، أ جـ لأقرب متر.

١٧) أ ب جـ مثلث فيه جا جـ = ٠,٣٥ ، جـَ = ١٤سم، أوجد بدلالة π مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث من الخارج.

١٨) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥٨، ق(∠ب) = ٣٨°، (∠جـ) = ٦٢° أوجد طول العمود النازل من أ على أَ.

١٩) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، فإذا كان أَ + بَ = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم فأوجد كل من أَ، بَ

٢٠) أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة طول قطرها ٢٠سم، إذا كان ق(∠أ) = ٤٢°، ق(∠ب) = ٧٤° ٤٨َ، أوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ

٢١) أ ب جـ مثلث فيه جـَ = ١٩سم، ق(∠أ) = ١١٢°، ق(∠ب) = ٣٣°، أوجد لأقرب رقمين عشريين كل من بَ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

٢٢) **الربط بالجغرافيا: الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ ، ب، جـ**

أوجد لأقرب كيلو متر:

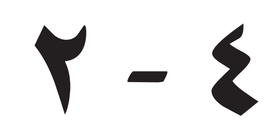
(أ) المسافة بين أ ، جـ (ب) المسافة بين ب ، جـ

أ ١٠٨° ١٦٠كم ب ٥٢° جـ

٢٣) **تفكير ابداعي:**

(أ) في المثلث أ ب جـ أثبت أن: $\frac{٣أَ - ٤بَ}{٣ جا أ - ٤ جاب} = \frac{جـَ}{جا جـ}$

(ب) إذا كانت مـ هى مساحة سطح المثلث أ ب جـ أثبت أن مـ = أَ٢ $\left(\frac{جاب جا جـ}{٢ جا أ}\right)$



قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine Rule

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة جيب التمام.

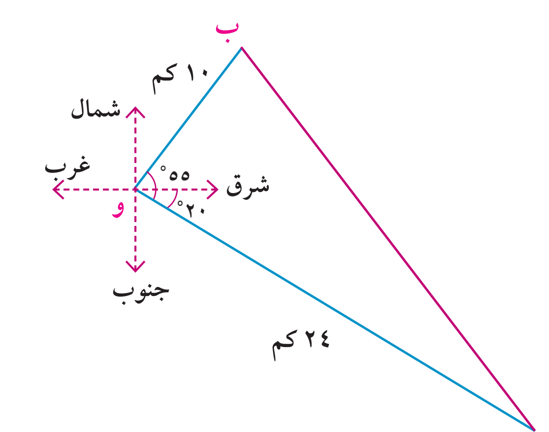
المصطلحات الأساسية

- قاعدة جيب التمام Cosine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

فكر و ناقش



تحركت سفينتان أ ، ب في نفس اللحظة من أحد الموانئ، فإذا تحركت أ في اتجاه ٢٠° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة ٢٤ كم وتحركت ب في اتجاه ٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم في نفس الزمن.

أوجد المسافة بين السفينتين في نهاية هذا الزمن.

استخدم القياسات الهندسية بمقياس رسم مناسب وذلك لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$.

هل يمكنك استخدام قانون الجيب لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$ ؟

هل يمكنك استنتاج قانون آخر لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$ بمعلومية طول كل من $\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{و ب}}$ وقياس الزاوية المحصورة بينهما؟ فسر إجابتك.

تعلم

(أستنتاج قاعدة جيب التمام لا يمتحن فيه الطالب)

قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine Rule

في △ ب ء جـ القائم الزاوية في ء:

$(\text{ب جـ})^2 = (\text{جـ ء})^2 + (\text{ب ء})^2$ **(نظرية فيثاغورث)**

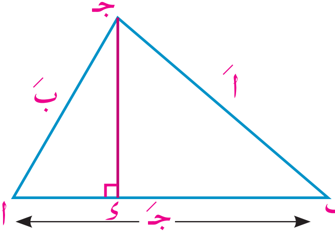
أي أن:

$\text{أَ}^2 = (\text{بَ جا أ})^2 + (\text{جـَ} - \text{بَ جتا أ})^2$

$= \text{بَ}^2 \text{ جا}^2\text{ أ} + \text{بَ}^2 \text{ جتا}^2\text{ أ} + \text{جـَ}^2 - ٢ \text{ بَ جـَ جتا أ}$ **(بفك الأقواس)**

$= \text{بَ}^2 (\text{ جا}^2\text{ أ} + \text{جتا}^2\text{ أ}) + \text{جـَ}^2 - ٢ \text{ بَ جـَ جتا أ}$ **(بأخذ بَ^{2} عامل مشترك)**

$= \text{بَ}^2 + \text{جـَ}^2 - ٢ \text{ بَ جـَ جتا أ}$ **(بالتبسيط)**



ومن ذلك يكون:

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جـَ}^2 - \text{أَ}^2}{٢ \text{ بَ جـَ}}$$



متطابقة فيثاغورث

$\text{جا}^2\text{ أ} + \text{جتا}^2\text{ أ} = ١$

ارشاد

يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أَ ، بَ ، حَ في ترتيب دوري واحد، حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استنتاج الصور الأخرى.

تفكير ناقد: هل القانون السابق صحيح إذا كان △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ؟ فسر إجابتك.

ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:

في أي مثلث أ ب حـ يكون:

أ٢ = ب٢ + حـ٢ - ٢ب حـ جتا أ ومنه جتا أ = $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$

ب٢ = حـ٢ + أ٢ - ٢ حـ أ جتا ب ومنه جتا ب = $\frac{حـ^٢ + أ^٢ - ب^٢}{٢ حـ أ}$

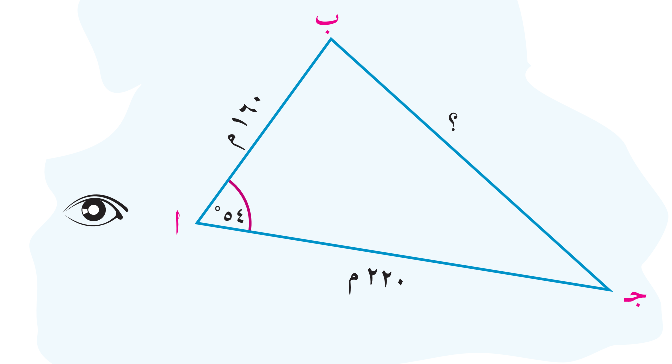
حـ٢ = أ٢ + ب٢ - ٢أ ب جتا حـ ومنه جتا حـ = $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$

نشاط

أ) استخدام الآلة الحاسبة في **إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث باستخدام قاعدة جيب التمام.**

أراد أحد المهندسين أن يجد المسافة بين موقعين يصعب الوصول إليهما باستخدام جهاز قياس المسافات ووجد أن بعده عن النقطة الأولى (أ) يساوي ١٦٠ مترًا وبعده عن النقطة الثانية (جـ) يساوي ٢٢٠ مترًا، وق (∠ب أ جـ) = ٥٤°.

استخدم هذه البيانات لحساب المسافة بين النقطتين لأقرب كيلو متر .



١ - حدد بدقة البيانات التى رصدها المهندس باستخدام جهاز قياسات المسافات.

٢ - حدد المطلوب.

٣ - مثل البيانات المطلوبة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا الأدوات الهندسية اللازمة..

٤ - قس بالسنتيمترات طول $\overline{ب جـ}$.

٥ - أوجد الطول الحقيقى للمسافة بين ب، جـ بالكيلو مترات.

٦ - هل يمكنك استخدام قاعدة جيب التمام لإيجاد المسافة بين نقطتى ب ، جـ؟ وضح ذلك.

٧ - قارن بين النتيجة التي حصلت عليها في إيجاد طول $\overline{ب جـ}$ باستخدام القياسات الهندسية وبين استخدامك لقاعدة جيب التمام.

تذكر أن

الطول الحقيقي = الطول في الرسم ÷ مقياس الرسم

من النشاط السابق نجد أن:

١ - مقياس الرسم المناسب هو: ١ سم لكل ٢٠ كيلو مترًا

٢ - باستخدام القياس: طول $\overline{ب جـ}$ = ٩ سم في الرسم

٣ - طول $\overline{ب جـ}$ الحقيقي ≃ ٩ × ٢٠ ≃ ١٨٠ كم

٤ - قاعدة جيب التمام هي: $أ^{\prime 2} = ب^{\prime 2} + حـ^{\prime 2} - ٢ب َحـ َ$ جتا أ

بالتعويض: $أ^{\prime 2} = (١٦٠)^٢ + (٢٢٠)^٢ - ٢ \times ١٦٠ \times ٢٢٠$ جتا ٥٤° $\simeq$ ٣٢٦١٩,٩

فتكون: أ َ $\simeq$ ١٨٠,٦ كم.

٥ – النتائج تكون أدق عندما يكون الرسم دقيقًا ولكن يفضل استخدام القوانين لإعطاء نتائج صحيحة تمامًا.

٦ – استخدام الآلة الحاسبة العلمية في إيجاد الناتج:

ابدأ

1 | 6 | 0 | χ^2 | + | 2 | 2 | 0 | χ^2 | – | 2 | × | 1 | 6 | 0 | ×

2 | 2 | 0 | × | Cos | 5 | 4 |) | = | √ | =

تطبيق على النشاط: أوجد طول الضلع الثالث مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين

في △ أ ب جـ الذي فيه:

أ) أ َ = ٤,٣٦سم ، ب َ = ٣,٨٤سم ، ق (∠ جـ) = ١٠١°

ب) ب َ = ٢سم ، حـ َ = ٥سم ، ق (∠أ) = ٦٠°

إيجاد قياس زاوية في المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

١) أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أ َ = ٤,٦ ، ب َ = ٣,٢ ، حـ َ = ٢,٨

الحل

∵ أكبر زاوية في القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولًا ∴ ∠أ أكبر زوايا المثلث قياسًا

$$\text{جتا أ} = \frac{ب^{\prime 2} + حـ^{\prime 2} - أ^{\prime 2}}{٢ب َحـ َ} = \frac{(٣,٢)^٢ + (٢,٨)^٢ - (٤,٦)^٢}{٢ \times ٣,٢ \times ٢,٨}$$

باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ

3.2 | χ^2 | + | 2.8 | χ^2 | – | 4.6 | χ^2 | = | ÷ | (| 2 | × | 3.2 | × | 2.8 |)

= | Shift | Cos | = | °'''

وحيث إن جيب التمام سالب، فالزاوية أ منفرجة

∴ ق (∠أ) = ٩٩° ٥٣َ ٤٩ً

حاول أن تحل

١) أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أ َ = ١١سم ، ب َ = ١٠سم ، حـ َ = ٨سم

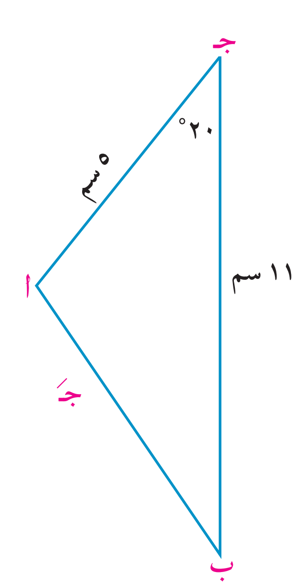
استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث:

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

أولًا: حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:

Solving the Triangle Given the Lengths of Two Sides and the Measure of the Angle Included

مثال



② حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ١١سم ، بَ= ٥سم ، ق (∠ جـ) = ٢٠°

الحل

يجب إيجاد جـَ، ق (∠ أ) ، ق (∠ ب)

∵ $جـ^{\prime 2} = أ^{\prime 2} + ب^{\prime 2} - ٢ أَ بَ$ جتا جـ (قانون جيب التمام)

$= (١١)^٢ + (٥)^٢ - ٢ \times ١١ \times ٥$ جتا ٢٠°

جـَ = $\sqrt{(١١)^٢ + (٥)^٢ - ٢ \times ١١ \times ٥ \text{ جتا } ٢٠°}$ ≃ ٦,٥٢٩ سم

جتا أ = $\frac{ب^{\prime 2} + جـ^{\prime 2} - أ^{\prime 2}}{٢ بَ جـَ} = \frac{(٥)^٢ + (٦,٥٢٩)^٢ - (١١)^٢}{٢ (٥) (٦,٥٢٩)}$ ≃ - ٠,٨١٧

ق (∠ أ) = ١٤٤° ٤٧َ

ق (∠ ب) = ١٨٠° - [ق (∠ أ) + ق (∠ جـ)]

= ١٨٠° - [١٤٤,٧٨٦° + ٢٠°] = ١٥,٢١٤°

لاحظ أن: في المثال السابق عند إيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلًا من استخدام قانون الجيب وذلك لأنه:

١- في حالة استخدام قانون الجيب:

- فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجب.

٢- في حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه:

- إذا كانت الزاوية منفرجة يكون جيب تمامها سالبًا.
- و إذا كانت الزاوية حادة يكون جيب تمامها موجبًا.
- يسمح أيضًا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة، علمًا بأن مجموع طولي أي ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث.



يمكنك استخدام قانون الجيب أيضًا لحساب ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) بعد إيجاد جـَ، ولكن الفائدة التي تعود من استخدام قانون جيب التمام هو التمييز بين الزوايا الحادة والمنفرجة.

حاول أن تحل

② حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ٢٤,٦سم ، جـَ = ١٤,٢سم، ق (∠ ب) = ١٨° ٤٢َ

ثانيًا: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

③ حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ٩سم ، بَ = ٧سم ، جـَ= ٥سم.

الحل

المطلوب هو إيجاد قياسات الزوايا أ ، ب ، حـ

∵ جتا أ $= \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ} = \frac{7^2 + 5^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 5} = -0,1$

و (∠ أ) ≃ ٩٥°٤٤َ٢١ً

جتا ب $= \frac{حـ^2 + أ^2 - ب^2}{2 حـ أ} = \frac{5^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 9} \simeq 0,633$

و (∠ ب) ≃ ٥٠°٤َ١٣ً

و (∠ حـ) = ١٨٠° - [و (∠ أ) + و (∠ ب)] = ٣٣°٣٣َ٢٦ً

حاول أن تحل

(٣) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ١٢,٢سم ، بَ = ١٨,٤سم ، حـَ = ٢١,١سم

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام *Geometric Applications on the Cosine Rule*

مثال

(٤) أ ب حـ مثلث فيه أَ = ٦٣سم ، بَ - حـَ = ٢٧ سم، ومحيط المثلث يساوي ١٤٠ سم، أوجد كلًّا من بَ ، حـَ وقياس أصغر زوايا المثلث، ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

∵ أَ + بَ + حـَ = ١٤٠ (محيط المثلث) ، أَ = ٦٣

∴ بَ + حـَ = ١٤٠ - ٦٣ أي بَ + حـَ = ٧٧ (١)

∵ بَ - حـَ = ٢٧ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع ينتج أن:

٢ بَ = ١٠٤ أي أن بَ = ٥٢ سم

بالتعويض في ١ ينتج أن حـَ = ٢٥سم

ونلاحظ أن حـَ هو أصغر أضلاع المثلث أ ب حـ

∴ ∠ حـ هي أصغر زوايا المثلث أ ب حـ

∴ جتا حـ $= \frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{2 أ ب} = \frac{(63)^2 + (52)^2 - (25)^2}{2 \times 63 \times 52} = 0,9230769$

∴ و (∠ حـ) = ٢٢°٣٧َ

مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا حـ

= $\frac{1}{2}$ × ٦٣ × ٥٢ × جا ٢٢°٣٧َ ≃ ٦٣٠سم^2

حاول أن تحل

٤ △ أ ب حـ فيه بَ = ٤سم، أَ + حـَ = ١١سم ، أَ - حـَ = ١سم ،أثبت أن ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)، ثم أوجد محيط المثلث أ ب حـ ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

مثال

٥ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٢٢سم ، ق (∠ أ ء ب) = ٦٥° ، ق (∠ ء ب أ) = ٥٠° ، ب حـ = ٢٥سم، ء حـ = ١٨سم، أوجد: ق (∠ حـ ب ء) ، ق (∠ ب حـ ء)

 **الحل**

في △ أ ب ء

ق (∠ أ) = ١٨٠° - (٥٠° + ٦٥°)

= ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°

∵ ق (∠ أ) = ق (∠ ء) = ٦٥°

∴ أ ب = ب ء = ٢٢سم

في △ ء ب حـ

$$\text{جتا}(\angle \text{ء ب حـ}) = \frac{(\text{ب ء})^٢ + (\text{ب حـ})^٢ - (\text{ء حـ})^٢}{٢ (\text{ب ء}) (\text{ب حـ})}$$

$$= \frac{(٢٢)^٢ + (٢٥)^٢ - (١٨)^٢}{٢ \times ٢٢ \times ٢٥} \simeq ٠{,}٧١٣٧$$

∴ ق (∠ ء ب حـ) ≃ ٤٤°٢٨َ٦ً

$$\text{جتا}(\angle \text{ب حـ ء}) = \frac{(\text{ب حـ})^٢ + (\text{حـ ء})^٢ - (\text{ب ء})^٢}{٢ (\text{ب حـ}) (\text{حـ ء})} = \frac{(٢٥)^٢ + (١٨)^٢ - (٢٢)^٢}{٢ \times ٢٥ \times ١٨} \simeq ٠{,}٥١٦٧$$

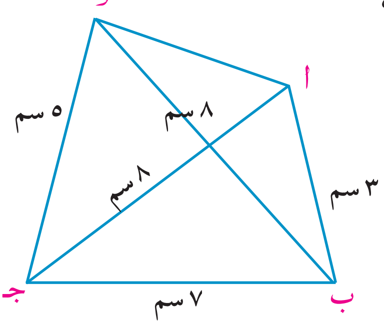
∴ ق (∠ ب حـ ء) ≃ ٥٨°٥َ٢٨ً

حاول أن تحل

٥ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠° ، ب ء = ١٠سم ، أ ء = ٨سم ، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠° ، أوجد أ حـ لأقرب سنتيميتر.

 **مثال**

٦ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٣سم ، أ حـ = ٨سم ، ب حـ = ٧سم ، حـ ء = ٥سم ، ب ء = ٨سم ، أثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.



الحل

في △ أ ب حـ

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^٢ + \text{حـَ}^٢ - \text{أَ}^٢}{٢\text{بَ حـَ}} = \frac{(٨)^٢ + (٣)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٨ \times ٣} = \frac{١}{٢}$$

∴ ق ($\angle$ أ) = ٦٠° **(١)**

في △ ب ى حـ

$$\text{جتا ى} = \frac{(\text{حـ ى})^2 + (\text{ى ب})^2 - (\text{ب حـ})^2}{2\,(\text{حـ ى})\,(\text{ى ب})} = \frac{(5)^2 + (8)^2 - (7)^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$$

∴ ق ($\angle$ ى) = ٦٠° **(٢)**

∵ ق ($\angle$ ب أ حـ) = ق ($\angle$ ب ى حـ) وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب جـ}}$ وفي جهة واحدة منها فيكون الشكل أ ب حـ ى رباعي دائري. (وهو المطلوب).

حاول أن تحل

٦ أ ب حـ ى شكل رباعي فيه أب = ٩سم ، ب حـ = ٥سم ، حـ ى = ٨سم ، ى أ =٩سم ، أ حـ = ١١سم. أثبت أن الشكل أ ب حـ ى رباعي دائري.

تمـــارين ٤ – ٢

أكمل كلًّا مما يأتى:

١ يستخدم .... لحل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

٢ يستخدم .... لحل المثلث بمعلومية قياسى زاويتين وطول ضلع فيه

٣ فى أى مثلث ل م ن يكون: $ل^2 = م^2 + ن^2 -$ .... ، جتا ل = $\frac{م^2 + ن^2 - \text{......}}{\text{......}}$

٤ في المثلث أ ب جـ ، أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات فإن قياس أكبر زواياه يساوي ....°

٥ مثلث س ص ع أطوال أضلاعه ٧,٥سم ، ٤,٧سم، ٤,٣سم فإن قياس أصغر زواياه يساوي ....°

٦ △ س ص ع فيه سَ = ١٠ سم ، صَ = ٦سم ، ق ($\angle$ ع) = ٦٠° فإن عَ = ...

٧ في△ ل ك م يكون $كَ^2 + مَ^2 - لَ^2 =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٨ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هى:

أ ١٥٠° ب ١٢٠° جـ ٦٠° د ٣٠°

٩ فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{لَ^2 + مَ^2 - نَ^2}{2\,لَ\,مَ}$ مساويًا:

أ جتا ل ب جتا م جـ جتا ن د لا شئ مما سبق

١٠ في المثلث س ص ع يكون $صَ^2 + عَ^2 - سَ^2 = 2\,صَ\,عَ \times$ .....

أ جتا س ب جا ع جـ جتا ع د جا س

١١ فى المثلث أ ب جـ ، أَ: بَ: جـَ = ٣: ٢: ٢ فإن جتا أ تساوى

أ $\frac{1}{8}$ ب $-\frac{1}{8}$ جـ $\frac{1}{4}$ د $\frac{3}{4}$

أجب عن الاسئلة الآتيه:

١٢ في المثلث أ ب جـ إذا كان:

أ) أَ = ٥سم ، بَ = ٧سم ، جـَ = ٨سم **فأثبت أن** ق(∠ب) = ٦٠°

ب) أَ = ٣سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = ٧سم **فأثبت أن** ق(∠جـ) = ١٢٠°

جـ) أَ = ١٣سم ، بَ = ٧سم ، جـَ = ١٣سم **فأوجد** ق(∠جـ)

د) أَ = ١٣سم ، بَ = ٨سم ، جـَ = ٧سم **فأوجد** ق(∠أ)

هـ) أَ = ١٠سم ، بَ = ١٧سم ، جـَ = ٢١سم **فأوجد** قياس أصغر زاوية فى المثلث

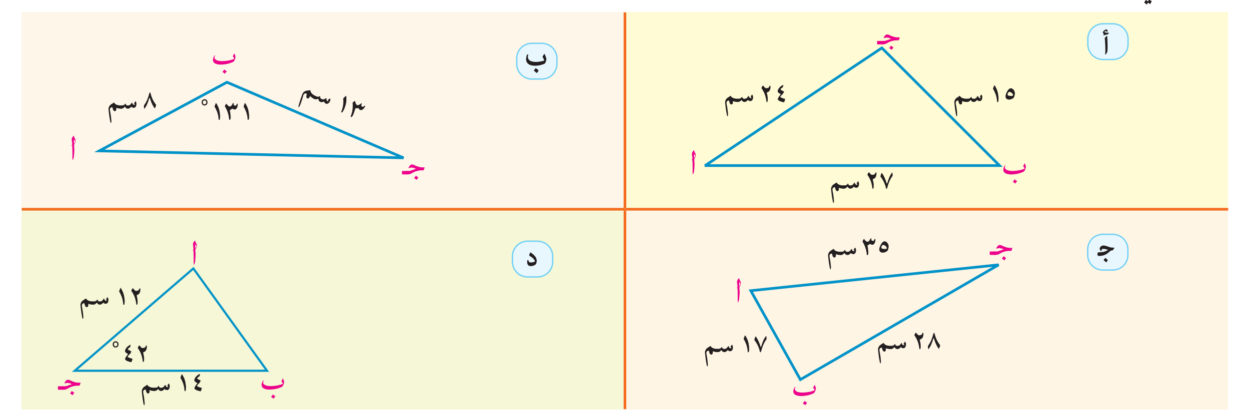
و) أَ = ٥سم ، بَ = ٦سم ، جـَ = ٧سم **فأوجد** قياس أكبر زاوية فى المثلث

ز) أَ = ١٧سم ، بَ = ١١سم ، ق(∠جـ) = ٤٢° **فأوجد** جـَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين



ح) بَ = ١٦ ، جـَ = ١٤ ، ق(∠أ) = ٧٢° **فأوجد** أَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

١٣ في التمارين من (أ) إلى (د) حل المثلث أ ب جـ:



تطبيقات هندسية:

١٤ متوازى أضلاع طولا ضلعيه المتجاورين ١٨سم، ٢٦سم، وقياس الزاوية بينهما ٣٩°، أوجد طول أصغر قطر له مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

١٥ أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٩سم، ب جـ = ٥سم، جـ ء = ٨سم ، أ ء = ٩سم ، أ جـ = ١١ سم، أثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

١٦ أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ = ١٣سم ، أ جـ = ٢٠ سم، أوجد طول $\overline{ب ء}$

١٧ أ ب جـ مثلث محيطه ٧٠سم ، أَ = ٢٦سم ، ق(∠أ) = ٦٠° ، أوجد مساحة سطحه.

⑱ الربط بالملاحة البحرية: يقف كريم وغدير على جانبي نهر كم يبعد كريم عن القارب؟ قرب إجابتك لأقرب متر.

غدير ٧٥° كريم ٤٠° ٨٠ م

⑲ الربط بالزراعة: يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طول ضلعيها ٩٨م، ٦٤ م ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج؟

⑳ البرهنة النظرية: أ ب جـ مثلث فيه ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$،

أثبت أن: $(\text{أب})^2 + (\text{أجـ})^2 = 2\,(\text{أى})^2 + 2\,(\text{بى})^2$ ،

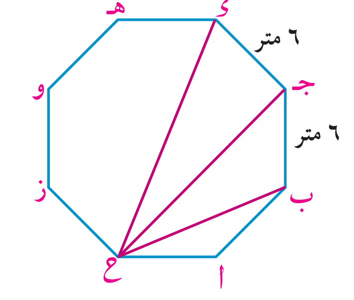
و إذا كان: أ ب = ٥سم ، أجـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد أ ى.

㉑ البرهنة النظرية (للمتفوقين): في المثلث أ ب جـ إذا كان: $(\text{أَ} + \text{بَ} + \text{جـَ})\,(\text{أَ} + \text{بَ} - \text{جـَ}) = \text{ك}\ \text{أَبَ}$

فاثبت أن: ك ∈]٠ ، ٤[، ثم أوجد ق(∠ جـ) عندما ك = ١

تطبيقات حياتية:

㉒ مسافات: يركب كريم دراجته البخاريه ليقطع المسافة من المدينة أ إلى المدينة جـ مرورًا بالمدينة ب بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س ، ثم يعود من المدينة جـ إلى المدينة أ بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س. **أوجد:**



أ) المسافة بالكيلو متر بين المدينة جـ ، المدينة أ

ب) الزمن الكلي بالدقيقة للرحلة كلها.

㉓ التصميم المعماري: صمم مهندس معماري مبنى على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار، أوجد أطوال الأقطار $\overline{\text{ع ب}}$ ، $\overline{\text{ع جـ}}$ ، $\overline{\text{ع ى}}$.

هـ ى ٦ متر جـ و ٦ متر ز ب ع ا

㉔ اكتشف الخطأ: أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٧سم ، بَ = ١٠ سم ، جـَ = ٥سم
ق(∠أ) = ٤١,٦٢°. أوجد ق(∠ب)

حل زياد	حل كريم
∵ $\frac{\text{بَ}}{\text{جاب}} = \frac{\text{أَ}}{\text{جاأ}}$	∵ جتا ب = $\frac{\text{أَ}^2 + \text{جـَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\ \text{أَ}\ \text{جـَ}}$
∴ $\frac{10}{\text{جاب}} = \frac{7}{\text{جا } 41{,}62}$	∴ جتا ب = $\frac{(7)^2 + (5)^2 - (10)^2}{2 \times 7 \times 5} \simeq -0{,}3714$
∴ جا ب = $\frac{10 \text{ جا } 41{,}62}{7} \simeq 0{,}9488$	∴ ق(∠ب) ≃ ١١١,٨°
∴ ق(∠ب) = ٧١,٥٩°	

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.